本日やること

1. 2. 2 階線形常微分方程式
   - 2.4 解析的な微分方程式と特殊関数
     - 解析的な解を持つ微分方程式
     - Bessel 関数

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の定義

関数 $f(x)$ がある点 a の近くで収束半径 (R とおく) が正のべき級数によって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a-R < x < a+R \text{ で収束} \tag{$\star$3}$$

のように表されるとき，$f(x)$ は 点 a で解析的であるという．関数 $f(x)$ がその定義域 I の全ての点で解析的であるとき，$f(x)$ は I で解析的である，または解析関数であるという．

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (I). (項別微分可能性)

$f(x)$ が点 a で解析的であり，収束半径 $R > 0$ のべき級数によって $(\star 3)$ のように表されるならば，$f(x)$ は a の近くで微分可能であり導関数 $f'(x)$ は同じ収束半径のべき級数によって

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-a)^{n-1}, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \tag{$\star 4$}$$

と表される．特に，解析関数はその定義域で何回でも微分可能である．

$$(\star 4) \text{ の第 } n \text{ 項} = \Big((\star 3) \text{ の第 } n \text{ 項} \Big)'$$

に注意。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (II).（Taylor 展開可能性）

解析関数はその定義域の全ての点で Taylor 展開可能である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ \Rightarrow \ a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

だから

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

でこれは Taylor 級数展開になっている.

要するに解析関数とは定義域の各点で Taylor 展開可能な関数のことである．特に，初等関数は全て解析的である.

解析的な微分方程式と特殊関数

解析的な解を持つ微分方程式

解析的な解を持つ微分方程式

$$(A) \quad \begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \end{cases}$$

ただし x を独立変数, $y = y(x)$ を未知関数とする。このとき

(Case 1) $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が a で解析的であるとき, a は (A) の通常点という. このとき任意の c_1, c_2 に対し a で解析的な (A) の解がただ一つある.

(Case 2) $R(x) \equiv 0$ とする. $P(x)$, $Q(x)$ が a で解析的でないとき, $(x-a)P(x)$, $(x-a)^2Q(x)$ が a で解析的ならば, a は (A) の確定特異点であるという. このとき任意の c_1, c_2 に対し実数 λ, $r > 0$ があって

$$y = |x-a|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (0 < |x-a| < r \text{ となる } x \text{ で収束})$$

の形の (A) の解がある.

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

[例題 2.]

(6) $$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (\nu \geqq 0 \text{ は定数})$$

を ν 次 Bessel 方程式という.

$$(6) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0$$

であるが $x \times \dfrac{1}{x}$, $x^2 \times \dfrac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ は 0 で解析的だから前節の (Case 2) にあたる. だから

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda} \quad (a_0 \neq 0)$$

としてよい.

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

これを (6) に代入し項別微分をすると

$$
\begin{aligned}
& x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda} \right)'' + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda} \right)' + (x^2 - \nu^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) \, x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda) \, x^{n+\lambda} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - \nu^2 \right) x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \, x^{n+\lambda} \\
&= a_0 (\lambda^2 - \nu^2) x^{\lambda} + a_1 (2\lambda + 1) \, x^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n ((n+\lambda)^2 - \nu^2) + a_{n-2} \right) \, x^{n+\lambda} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

各次の係数を 0 とおいて

$$\{\lambda^2-\nu^2\}a_0=0,\ \{(\lambda+1)^2-\nu^2\}a_1=0,\ \{(\lambda+n)^2-\nu^2\}a_n+a_{n-2}=0,\ (n=2,3,\cdots)$$

でなくてはならないことが分かる。 特に

$$\lambda=\nu,\quad a_0=2^{-\nu}\Gamma(\nu+1)^{-1},\quad a_1=0$$

として一つの解

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

が得られる.

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

ただし $\Gamma(x)$ はガンマ関数であり

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

で定義される。次の性質

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \text{だから } \Gamma(n) = (n-1)!, (n = 1, 2, \cdots)$$

を持つので階乗の一般化と考えてほしい。

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

また

$$\lambda = -\nu, \quad a_0 = 2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)^{-1}, \quad a_1 = 0$$

としてもう一つの解

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

が得られる. ν が整数でないとき $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は一次独立であり (6) の基本解系となる。これを ν 次の (第 1 種) Bessel 関数という.