# 本日やること

1. 2．2 階線形常微分方程式
   - 2.4 解析的な微分方程式と特殊関数
     - べき級数と解析関数
     - 解析的な解を持つ微分方程式
     - べき級数による微分方程式の解法
     - Bessel 関数

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

定数係数と変数係数の 2 階線形方程式

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x),$$

$\rightarrow$ 初等関数 (と右辺の積分) で解が書ける

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x),$$

$\rightarrow$ 一般に解は初等関数でない

そこで初等関数を拡張して解析関数というものを考える。

$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が解析的ならば, 解析的な解を作ることができる。

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

### 級数とその和の定義

$\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Big( = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \Big) \qquad (\star)$$

を級数 (または無限級数) という．極限

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \Big( = \lim_{n\to+\infty} a_0 + a_1 + \cdots + a_n \Big)$$

が存在するとき，級数 $(\star)$ は和 $S$ に収束するという．

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

[例：幾何級数 (等比級数)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \begin{cases} \infty & (r \geqq 1,\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{1-r} & (|r| < 1\ \text{のとき}) \\ \text{発散} & (r \leqq\ -1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

[確かめ] $r \neq 1$ のとき $1 + r + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ であるが

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r \geqq 1,\ \text{のとき}) \\ 0 & (|r| < 1\ \text{のとき}) \\ \text{発散} & (r \leqq\ -1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

だから。

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

### べき級数の定義

$x$ を変数, $a$ を定数, $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{$\star$2}$$

を, $a$ を中心とするべき級数という. 極限

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

が存在するときべき級数 ($\star$2) は収束するという. べき級数は $\infty$ 次の多項式と考えることができて, べき級数の和 $f(x)$ は $x$ の関数となる.

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

### べき級数の性質 (収束半径)

べき級数 $(\star 2)$ に対して次の性質を満たす $R$ $(0 \leqq R < \infty$ または $R = \infty)$ が存在する：

(i) $|x - a| < R \quad \Rightarrow \quad (\star 2)$ は収束,

(ii) $|x - a| > R \quad \Rightarrow \quad (\star 2)$ は発散

ただし

$(\star 2)$ が全ての実数 $x$ に対して収束するなら $R = \infty$,

$(\star 2)$ が $x = a$ 以外の全ての $x$ に対して発散するなら $R = 0$ とする.

$R$ を $(\star 2)$ の収束半径という.

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

[例]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

は $-1 < x < 1$ のとき収束し, $|x| > 1$ のとき発散するから収束半径は 1.

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

**収束半径の計算法（d'Alembert の ratio test）**

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$$ が存在するならば収束半径に等しい

[例]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

は

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

だから収束半径は $+\infty$

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

### 解析関数の定義

関数 $f(x)$ がある点 $a$ の近くで収束半径 ($R$ とおく) が正のべき級数によって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \tag{$\star 3$}$$

のように表されるとき，$f(x)$ は 点 $a$ で解析的であるという．関数 $f(x)$ がその定義域 $I$ の全ての点で解析的であるとき，$f(x)$ は $I$ で解析的である，または解析関数であるという．

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

**解析関数の性質 (I).（項別微分可能性）**

$f(x)$ が点 $a$ で解析的であり，収束半径 $R > 0$ のべき級数によって $(\star 3)$ のように表されるならば，$f(x)$ は $a$ の近くで微分可能であり導関数 $f'(x)$ は同じ収束半径のべき級数によって

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-a)^{n-1}, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \tag{$\star 4$}$$

と表される．特に，解析関数はその定義域で何回でも微分可能である．

$$(\star 4) \text{ の第 } n \text{ 項} = \Big( (\star 3) \text{ の第 } n \text{ 項} \Big)'$$

に注意。

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数と解析関数

**解析関数の性質 (II).（Taylor 展開可能性）**

解析関数はその定義域の全ての点で Taylor 展開可能である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ \Rightarrow \ a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

だから

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

でこれは Taylor 級数展開になっている.

要するに解析関数とは定義域の各点で Taylor 展開可能な関数のことである．特に，初等関数は全て解析的である.

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## 解析的な解を持つ微分方程式

### 解析的な解を持つ微分方程式

$$(A) \quad \begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \end{cases}$$

ただし $x$ を独立変数, $y = y(x)$ を未知関数とする。このとき

**(Case 1)** $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が $a$ で解析的であるとき, $a$ は (A) の通常点という．このとき任意の $c_1$, $c_2$ に対し $a$ で解析的な $(A)$ の解がただ一つある．

**(Case 2)** $R(x) \equiv 0$ とする． $P(x)$, $Q(x)$ が $a$ で解析的でないとき, $(x-a)P(x)$, $(x-a)^2Q(x)$ が $a$ で解析的ならば, $a$ は (A) の確定特異点であるという．このとき任意の $c_1$, $c_2$ に対し実数 $\lambda$, $r > 0$ があって

$$y = |x-a|^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (0 < |x-a| < r \text{ となる } x \text{ で収束})$$

の形の $(A)$ の解がある．

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数による微分方程式の解法

[例題 1.] $y'' + 3xy' + 6y = 0 \cdots ①$ は特異点を持たないからべき級数解

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \cdots ②$$

を持つ. $y(0) = 1, y'(0) = 0 \cdots ③$ のとき $c_n$ を決定する.

② を ① へ代入して項別微分。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'' + 3x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' + 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 0$$

$$\text{第 1 項} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

$$\text{第 2 項} = 3x\left(\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 3n c_n x^n$$

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数による微分方程式の解法

同次の項をまとめて

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2}+(3n+6)c_n)\,x^n=0 \quad (x \text{ の恒等式})$$

だから

$$(n+1)c_{n+2}+3c_n=0, \quad (n=0,1,\cdots) \quad \cdots ④$$

一方

$$y(0)=c_0, y'(0)=c_1 \text{ だから ③ より } \quad c_0=1, c_1=0 \cdots ⑤$$

④, ⑤ により

$$c_1=c_3=c_5=\cdots=0, \quad c_0=1, c_2=-3, c_4=3, c_6=-\frac{9}{5}, \cdots$$

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## べき級数による微分方程式の解法

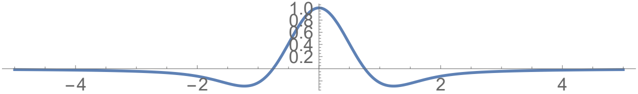
まとめて

$$y = 1 - 3x^2 + 3x^4 - \frac{9}{5}x^6 + \cdots$$

④ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+2}|}{|c_n|} = \infty$ であるが，これから収束半径 $= \infty$ 導かれることが分かっている。

Mathematica で計算すると

$y = 1 - \sqrt{6}xe^{-\frac{3}{2}x^2} \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}x} e^{y^2}\, dy$



# 解析的な微分方程式と特殊関数

## Bessel 関数

[例題 2.]

$$(6) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (\nu \geqq 0 \text{ は定数})$$

を **$\boldsymbol{\nu}$ Bessel** 方程式という．

$$(6) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0$$

であるが $x \times \dfrac{1}{x}$, $x^2 \times \dfrac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ は 0 で解析的だから前節の (Case 2) にあたる．だから

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\lambda} \quad (a_0 \neq 0)$$

としてよい．

# 解析的な微分方程式と特殊関数

## Bessel 関数

これを (6) に代入すると

$$\lambda^2-\nu^2=0,\ \{(\lambda+1)^2-\nu^2\}a_1=0,\ \{(\lambda+n)^2-\nu^2\}a_n+a_{n-2}=0,\ (n=2,3,\cdots)$$

でなくてはならないことが分かるが, 特に

$$\lambda=\nu,\quad a_0=2^{-\nu}\Gamma(\nu+1)^{-1}$$

として一つの解

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

が得られる．これを $\nu$ 次の Bessel 関数という．ただし

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{: Gamma 関数}$$