3. 連立線形常微分方程式

[本日やること]

1. 復習：定数係数連立線形常微分方程式
2. 振動の解析

3. 連立線型微分方程式

独立変数を t とする.

復習：定数係数連立一階線形常微分方程式の定義

$$(P) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases}$$

を, 定数係数連立一階線形常微分方程式 という. ただし

$y_j = y_j(t)$: t の未知関数, $\quad f_j = f_j(t)$: t の既知関数, $(j = 1, \cdots, n)$

a_{ij} : 実数の定数 $(i, j = 1, \cdots, n)$

3. 連立線型微分方程式

復習：ベクトル関数の微分方程式・初期値問題

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

とおくと (P) は

$(P)'$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$$

と書き表すことができる.

$(P)'$ に初期条件 $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ を付け加えた問題

(IVP)
$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

を 初期値問題 という.

3. 線形連立微分方程式

復習：斉次方程式の解

$(P)'$ で $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ としたもの（これを斉次方程式という）

$$(P_0) \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

について次のことが分かっている。
(I) (P_0) は n 個の (ベクトル関数として) 一次独立な解

$$\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)$$

をもつ．これを 基本解 という．

(II) (P_0) の 一般解 は

$$c_1\boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(t), \quad (c_1, \cdots, c_n \text{ は任意定数})$$

である．この他に解はない．

3. 線形連立微分方程式

斉次方程式の解 (続き)

(III). $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つならば,

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{u}_n$$

は (P_0) の基本解となる。ただし $\lambda_j \quad (j = 1, \cdots, n)$ は固有値。

[確かめ] (i) λ, $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有値, 固有ベクトルであるとき $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{u}$ は (P_0) の解となる。なぜなら

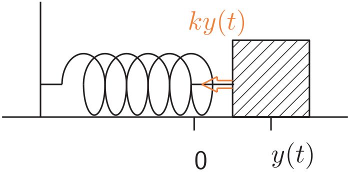
$$\boldsymbol{y}'(t) = \left(e^{\lambda t}\right)' \boldsymbol{u} = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = e^{\lambda t}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{y}$$

だから。
(ii) $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots \boldsymbol{y}_n\}$ が独立であることは $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$ が独立であることからすぐ結論される。

3. 線形連立微分方程式

例：振動

[例：振動 1. （摩擦のない場合）]



時刻：t [s],

物体の質量：m [kg],

物体の時刻 t での位置：$y(t)$ [m]

位置，速度は右向きを正として測り，原点は スプリングの自然長の位置とする

スプリングの弾性定数：$k > 0$

働く力はスプリングの弾性力 $-ky(t)$ [N] だから運動方程式は

$$my''(t) = -ky(t) \tag{1}$$

3. 線形連立微分方程式

例：振動

連立方程式系に直して解析する。

$$(1) \iff \begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{k}{m}y(t) \end{cases}$$

だから

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(1) \iff \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) \tag{2}$$

3. 線形連立微分方程式

例：振動

$\boldsymbol{A}$ の固有値は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおいて固有方程式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

をといて $\lambda = \pm i\omega$. これらに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

である。

3. 線形連立微分方程式

例：振動

したがって基本解として

$$\left\{ e^{i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ i\omega\end{pmatrix}\cdots①,\quad e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ -i\omega\end{pmatrix}\cdots②\right\}$$

が取れるが「重ね合わせの原理」により

$$\frac{1}{2}(①+②)=\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\omega\sin\omega t\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i}(①-②)=\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\end{pmatrix}$$

の組も基本解となり (2) の一般解は

$$\boldsymbol{y}=C_1\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\omega\sin\omega t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\end{pmatrix}\qquad C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}$$

と書ける。

3. 線形連立微分方程式

例：振動

[例：振動 2. （速度に比例した摩擦の働く場合）]
物体に弾性力のほかに速度に比例した摩擦力 $-\ell y'(t)$ の働く場合, 運動方程式は

$$my''(t) = -ky(t) - \ell y'(t) \tag{3}$$

となり

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\ell}{m} \end{pmatrix},$$

とおくと

$$(3) \iff \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t) \tag{4}$$

となる。

3. 線形連立微分方程式

例：振動

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\ell^2}{4m^2}}$$

とおくと $\boldsymbol{B}$ の固有値・固有ベクトルは

$$\left\{-\left(\frac{\ell}{2m} + \tilde{\omega}i\right), \quad -\left(\frac{\ell}{2m} - \tilde{\omega}i\right)\right\}, \quad \begin{pmatrix} -\left(\frac{\ell}{2m} - \tilde{\omega}i\right) \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\left(\frac{\ell}{2m} + \tilde{\omega}i\right) \\ \omega^2 \end{pmatrix},$$

である。これから基本解系

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{\ell t}{2m}}\left(-\frac{\ell}{2m}\cos\tilde{\omega}t + \tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t\right) \\ \omega^2 e^{-\frac{\ell t}{2m}}\cos\tilde{\omega}t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-\frac{\ell t}{2m}}\left(\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t + \frac{\ell}{2m}\sin\tilde{\omega}t\right) \\ \omega^2 e^{-\frac{\ell t}{2m}}\sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix}$$

と一般解

$$C_1 \begin{pmatrix} e^{-\frac{\ell t}{2m}}\left(-\frac{\ell}{2m}\cos\tilde{\omega}t + \tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t\right) \\ \omega^2 e^{-\frac{\ell t}{2m}}\cos\tilde{\omega}t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-\frac{\ell t}{2m}}\left(\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t + \frac{\ell}{2m}\sin\tilde{\omega}t\right) \\ \omega^2 e^{-\frac{\ell t}{2m}}\sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix}$$

が得られる。