3. 連立線形常微分方程式

[本日やること]

1. 定数係数連立線形常微分方程式の定義
2. ベクトル関数による表示
3. 線形代数を使った解法

3. 連立線型微分方程式

独立変数を t とする.

定数係数連立一階線形常微分方程式の定義

$$(P)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases}$$

を, 定数係数連立一階線形常微分方程式 という. ただし

$y_j = y_j(t)$: t の未知関数, $f_j = f_j(t)$: t の既知関数, $(j = 1, \cdots, n)$

a_{ij} : 実数の定数 $(i, j = 1, \cdots, n)$

3. 連立線型微分方程式

2 階以上の連立でない微分方程式 (これを単独方程式という) を 1 階連立微分方程式に書き直すことができる.

[例] $x(t)$, $y(t)$: 未知関数とするとき, $x'(t) = y(t)$ とおくと

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 3 \qquad \text{2 階単独}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 3\,x(t) + 2\,y(t) + 3 \end{cases} \qquad \text{1 階連立}$$

微分方程式を 1 階に直すことにより, (未知関数が増えるのではあるが) 理論的に見通しがよくなる.

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数とその導関数

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

のように成分が関数であるベクトルをベクトル関数という。各成分を微分してできるベクトル関数

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{y}(t)$ の導関数という。これもベクトル関数となる。

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数の微分方程式

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

とおくと (P) は

$(P)'$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$$

と書き表すことができる.

1. (P) の解については後期に「機械系の応用数学」で一般的にやる予定。

2. 今回は $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ であり $\boldsymbol{A}$ が n 個の独立な固有ベクトルを持つような特別の場合に解を求めておく。

3. 連立線型微分方程式

初期値問題

$(P)'$ に初期条件 $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ を付け加えた問題

$$(IVP) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

を 初期値問題 という.

3. 線形連立微分方程式

斉次方程式の解

$(P)'$ で $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ としたもの（これを斉次方程式という）

$$(P_0) \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

について次のことが分かっている。
(I) (P_0) は n 個の (ベクトル関数として) 一次独立な解

$$\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)$$

をもつ．これを 基本解 という．

(II) (P_0) の 一般解 は

$$c_1\boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(t), \quad (c_1, \cdots, c_n \text{ は任意定数})$$

である．この他に解はない．

3. 線形連立微分方程式

ただし,

ベクトル関数の一次独立性

$\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)$ が ベクトル関数として一次独立であるというのは

$$c_1, \cdots, c_n \text{ は定数で，} c_1\boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(t) = \mathbf{0} \text{ は } t \text{ の恒等式}$$
$$\Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

となることである.

解の一次独立性

ベクトル $\boldsymbol{y}_{01}, \cdots, \boldsymbol{y}_{0n}$ に対する (IVP) の解を $\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_2(t)$ とするとき,

(i) $\{\boldsymbol{y}_1(0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(0)\}$：ベクトルとして一次独立

$$\Updownarrow$$

(ii) $\{\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)\}$：ベクトル関数として一次独立

である。

3. 線形連立微分方程式

[確かめ]

(i) $\Leftrightarrow$

$$c_1\boldsymbol{y}_1(0)+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n(0)=\mathbf{0}\cdots①$$
$$\Rightarrow\ c_1=\cdots=c_n=0$$

(ii) $\Leftrightarrow$

$$\text{すべての } t \text{ について } c_1\boldsymbol{y}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n(t)=\mathbf{0}\cdots②$$
$$\Rightarrow\ c_1=\cdots=c_n=0$$

である。
(i)⇒(ii) の確かめ: ② が成り立っているとすると, ① も成り立つので (i) より $c_1=\cdots=c_n=0$ だから (ii) が成り立つ。(これは常に成立)
(ii)⇒(i) の確かめ: ① が成り立っているとする. $\boldsymbol{Y}(t)=c_1\boldsymbol{y}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n(t)$ とおくとこれは初期条件 $\boldsymbol{Y}(0)=\mathbf{0}$ を満たす (IVP) の解となる。一方 $\boldsymbol{y}(t)=\mathbf{0}$ も初期条件 $\boldsymbol{y}(0)=\mathbf{0}$ を満たす (IVP) の解である。(IVP) の解はただ一つしかないからすべての t に対して $\boldsymbol{Y}(t)=\mathbf{0}$. 即ち ② がわかる。

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

λ ：$\boldsymbol{A}$ の固有値， $\boldsymbol{x}$ ：λ に対する固有ベクトル

であるとは

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であること

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の対角化

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つならば，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

とおくと $\boldsymbol{P}$ は正則行列となり

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\star 2)$$

となる。ここで $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は固有値となる。$(\star 2)$ を $\boldsymbol{A}$ の対角化という。

3. 線形連立微分方程式

斉次方程式の解 (続き)

[3]. $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つならば,

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{u}_n$$

は (P_0) の基本解となる。

[確かめ] (i) λ, $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有値, 固有ベクトルであるとき $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{u}$ は (P_0) の解となる。なぜなら

$$\boldsymbol{y}'(t) = \left(e^{\lambda t}\right)' \boldsymbol{u} = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = e^{\lambda t}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{y}$$

だから。
(ii) $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots \boldsymbol{y}_n\}$ が独立であることは $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$ が独立であることからわかる。

3. 線形連立微分方程式

[例題] $x = x(t)$ を未知関数, ω を正の定数とする。

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

を 1 階連立方程式に直して一般解を求めよ。

(一階化) $y = x'$ とおくと $(\star)$ は

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases}$$

となるので

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\star)$ は

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{$\star 2$}$$

となる。

3. 線形連立微分方程式

(固有値・固有ベクトル) $\boldsymbol{A}$ の固有値は固有方程式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

をといて $\lambda = \pm i\omega$.

これらに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_\pm = \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$ (複合同順) とすると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$$

を満たすから

$$\boldsymbol{u}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega \end{pmatrix}$$

3. 線形連立微分方程式

(基本解・一般解) したがって基本解は

$$\left\{ e^{i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right\}$$

一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}$$

(初期条件を満たす解)

$$\boldsymbol{y}(0) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$. したがって

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}e^{i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, e^{i\omega t} \\ \mathrm{Re}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\sin\omega \end{pmatrix}$$