

本日よりこと

- ① 2. 2 階線形常微分方程式
 - 2.1 定数係数線形斉次方程式
 - 2.3 定数係数線形 2 階非斉次方程式

2. 2 階線形常微分方程式

復習

復習：定数係数線形 2 階齊次方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b : \text{実数の定数} \quad (2.1)$$

を定数係数線型 2 階齊次常微分方程式という。

復習：複素指数関数

複素数 $\lambda = p + iq$ (p, q は実数) に対して

$$e^\lambda = e^p(\cos q + i \sin q)$$

と定めると λ : 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (*)$$

となる。

2. 2 階線形常微分方程式

復習

(2.1) の解法のアイディア：特性方程式・特性解

$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}\end{aligned}$$

だから

$$y = e^{\lambda x} \text{ が (2.1) の解} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.2)$$

(2.2) を**特性方程式**といい、解 λ を**特性解**という。

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造)

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ. ただし D は特性方程式の判別式.

[1-1] $D > 0$ の場合. 特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

[1-2] $D = 0$ の場合. 特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $D < 0$ の場合. 特性解を $\lambda_1 = A + iB, \lambda_2 = A - iB$ (A, B は実数) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \text{ (複素数値解となる) または}$$

$$\{e^{Ax} \cos Bx, e^{Ax} \sin Bx\} \text{ (実数値解となる)}$$

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造 続き)

[2] $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とすると、(2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

の形をしている。この他に解はない。

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式

$$y'' + ay' + by = r(x), \quad (r(x) : \text{必ずしも } 0 \text{ でない既知関数}) \quad (2.12)$$

を定数係数線型 2 階非斉次常微分方程式という。

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式の一般解

(2.12) の解のひとつを $y_p(x)$ とすると (2.12) の一般解は

$$y = y_p(x) + (2.1) \text{ の一般解}$$

となる。この他に解はない。

$y_p(x)$ を **特解** という。

[確かめ] $y(x)$: (2.12) の任意の解, $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} Y''(x) + aY'(x) + bY(x) &= (y''(x) + ay'(x) + by(x)) - (y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)) \\ &= r(x) - r(x) = 0 \end{aligned}$$

より $Y(x)$ は (2.1) の解であるので明らか。

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[未定係数法による特解の求め方]

[準備 1]

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_1(x) \text{ の解} \\ y_2(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_2(x) \text{ の解} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$\text{は } Y'' + aY' + bY = C_1 r_1(x) + C_2 r_2(x) \text{ の解}$$

[確かめ]

左辺

$$= (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + a(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' + b(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))$$

$$= C_1 (y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2 (y_2'' + ay_2' + by_2)$$

$$= C_1 r_1 + C_2 r_2 = \text{右辺}$$

だから.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 2] λ : 複素数の定数 とする。

$$y'' + ay' + by = ke^{\lambda x} \cdots (*)$$

の特解として

(i) λ が特性解でないとき $y_p(x) = Ae^{\lambda x} \cdots (a)$

(ii) λ が特性解, 特性方程式の判別式 $D \neq 0$ のとき $y_p(x) = Axe^{\lambda x} \cdots (b)$

がとれる. ただし A は複素数の定数。

[確かめ] (i) のとき. (*) に (a) を代入

$$\begin{aligned} (*) \text{ の左辺} &= (Ae^{\lambda x})'' + a(Ae^{\lambda x})' + b(Ae^{\lambda x}) \\ &= A(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ から明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

(ii) のとき (b) を代入すると

$$\begin{aligned}(\star) \text{ の左辺} &= (Ax e^{\lambda x})'' + a(Ax e^{\lambda x})' + b(Ax e^{\lambda x}) \\ &= A\{(2\lambda + a)e^{\lambda x} + (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x}\}\end{aligned}$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $2\lambda + a = \sqrt{D} \neq 0$ から明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 3]

$y(x)$, $r(x)$: 複素数値関数, $Y(x) = \operatorname{Re} y(x)$, $Z(x) = \operatorname{Im} y(x)$ とする.

$$y'' + ay' + by = r(x), \dots (\star)$$

$$\Rightarrow Y'' + aY' + bY = \operatorname{Re} r(x) \quad Z'' + aZ' + bZ = \operatorname{Im} r(x)$$

[確かめ] $y = Y + iZ$, $r(x) = \operatorname{Re} r(x) + i \operatorname{Im} r(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\star) \text{ の左辺} &= (Y + iZ)'' + a(Y + iZ)' + b(Y + iZ) \\ &= (Y'' + aY' + bY) + i(Z'' + aZ' + bZ) \end{aligned}$$

$$(\star) \text{ の右辺} = \operatorname{Re} r(x) + i \operatorname{Im} r(x)$$

となるが, 実部虚部同士をそれぞれ比較せよ.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方

$k, k_1, k_2, \alpha, \beta$: 実数の定数 とするとき (2.12) の特解 $y_p(x)$ は次のようになるとしてよい。

1. $r(x) = k e^{\lambda x}$ の場合, (λ は複素数でもよい)

① λ は特性解でないならば $y_p(x) = A e^{\lambda x}$.

② λ は特性解, $D = a^2 - 4b \neq 0$ ならば $y_p(x) = A x e^{\lambda x}$.

2. $r(x) = k \cos \beta x$ または $k \sin \beta x$ の場合,

① $\pm i\beta$ は特性解でないならば $y_p(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$.

② $\pm i\beta$ は特性解であるならば $y_p(x) = A x \cos \beta x + B x \sin \beta x$.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方：続き

3. $r(x) = k e^{\alpha x} \cos \beta x$ または $k e^{\alpha x} \sin \beta x$ の場合,

① $\alpha \pm i\beta$ は特性解でないならば

$$y_p(x) = A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

② $D \neq 0$ かつ $\alpha \pm i\beta$ は特性解であるならば

$$y_p(x) = A x e^{\alpha x} \cos \beta x + B x e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

4. $r(x) = n$ 次多項式の場合,

① $a \neq 0, b \neq 0$ ならば $y_p = n$ 次多項式.

② $a \neq 0, b = 0$ ならば $y_p = n + 1$ 次多項式.

③ $a = 0, b = 0$ ならば $y_p = n + 2$ 次多項式.

これらを (2.12) に代入してなりたつように未定係数 A, B, \dots を決めればよい.