本日やること

1. 2．2 階線形常微分方程式
   - 2.1 定数係数線形斉次方程式

2. 2 階線形常微分方程式

定義

定数係数線形 2 階斉次方程式の定義

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b : \text{実数の定数} \tag{2.1}$$

を定数係数線型 2 階斉次常微分方程式という.

これは完全に解くことができて, 解は指数関数と三角関数を用いて表すことができる.
振動現象の解析で重要である。
議論の見通しをよくするために複素指数関数を使う.

2．2 階線形常微分方程式

準備

重ね合わせの原理

C_1, C_2：定数とするとき

$$y_1(x), y_2(x) \text{ が } (2.1) \text{ の解} \Longrightarrow C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \text{ も } (2.1) \text{ の解}.$$

である．これを重ね合わせの原理という。

[確かめ] $C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x))'' + a(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x))' \\
&\qquad\qquad + b(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)) \\
&= C_1\,(y_1''(x) + a y_1'(x) + b y_1(x)) + C_2\,(y_2''(x) + a y_2'(x) + b y_2(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから (2.1) をみたす．

2. 2 階線形常微分方程式

準備

複素指数関数

複素数 $\lambda = p + iq$ (p, q は実数) に対して

$$e^{\lambda} = e^{p}(\cos q + i \sin q)$$

と定めると λ : 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} \qquad (\star)$$

となる.

2. 2 階線形常微分方程式

準備

(2.1) の解法のアイデア：特性方程式・特性解

$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

だから

$$y = e^{\lambda x}\text{が (2.1) の解} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.2}$$

(2.2) を特性方程式といい、解 λ を特性解という。

2. 2 階線形常微分方程式

準備

関数の一次独立性・基本解系

関数の組 $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)\}$ が 1 次独立であるとは

「定数の組 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ があってすべての x に対して

$k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) + \cdots + k_m\, y_m(x) = 0$ となる」

$$\Longrightarrow \ k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

となることと定める．一次独立でないことを一次従属であるという．
(2.1) の解の組で 1 次独立であるものを基本解系という．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造)

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ．ただし D は特性方程式の判別式．

[1-1] $D > 0$ の場合．　特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$$

[1-2] $D = 0$ の場合．　特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x},\ x\,e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $D < 0$ の場合．　特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 複素解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$$

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造　続き)

[2]　$\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とするとき, (2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$

の形をしている．この他に解はない．

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 A. [1] の確かめ]

1. λ が特性解であるとき $y = e^{\lambda x}$ が (2.1) の解となること.

すでに 5 ページ目で述べた.

2. λ が重解であるとき, $y = xe^{\lambda x}$ も (2.1) の解となること.

$y = xe^{\lambda x}$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$(xe^{\lambda x})'' + a(xe^{\lambda x})' + b(xe^{\lambda x}) = (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0$$

となるが, $\lambda = -\dfrac{a}{2}$ となるので, $y = xe^{\lambda x}$ も解となる. [確かめ終り]

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

初期値問題

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0, & (1) \\ y(0) = A,\ y'(0) = B & (2) \end{cases} \tag{2.5}$$

を定数係数線型 2 階斉次方程式 (2.1) に対する初期値問題という．(2) を初期条件という．(2 階方程式の場合は初期条件が 2 個必要である.)

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 B.]　(2.5) の解はただ一つである．特に $y(0)=0,\ y'(0)=0$ である解は $y(x)\equiv 0$ だけである．

[考え方.]　$y_1(x)$, $y_2(x)$ を (2.5) の二つの解とする．

$$\left((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2\right)'=2(y_1-y_2)(y_1'-y_2')+2(y_1'-y_2')(y_1''-y_2'')$$

$y_1''-y_2''=-a(y_1'-y_2')-b(y_1-y_2)$ だから

$$=2\{(y_1-y_2)-a(y_1'-y_2')-b(y_1-y_2)\}(y_1'-y_2')$$

$2\alpha\beta\leqq\alpha^2+\beta^2$ だから

$$\leqq K\left((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2\right)\quad (ただし\ K=2(|a|+|b|+1))$$

とできる．

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

右辺を移項して両辺に e^{-Kx} をかけると

$$e^{-Kx}\Big((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2\Big)'-Ke^{-Kx}\Big((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2\Big)\leqq 0$$

積の微分法により

$$\Big(e^{-Kx}((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2)\Big)'\leqq 0$$

これは $e^{-Kx}((y_1-y_2)^2+(y_1'-y_2')^2)$ が単調減少であることを意味するから

$$(y_1(x)-y_2(x))^2+(y_1'(x)-y_2'(x))^2\leqq e^{Kx}\Big((y_1(0)-y_2(0))^2+(y_1'(0)-y_2'(0))^2\Big)$$

が導かれる．初期条件が一致すれば右辺は 0 となるので $y_1(x)\equiv y_2(x)$ となる．
[考え方終]

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 C.]　$y_1(x)$, $y_2(x)$ が (2.1) の解のとき

$\{y_1(x), y_2(x)\}$ が関数として一次従属 (独立)

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} \right\}$$ がベクトルとして一次従属 (独立)

[確かめ]　$\Rightarrow$ を示す．仮定より，

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0, \qquad (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

となる定数 k_1, k_2 がある．微分して

$$k_1 y_1'(x) + k_2 y_2'(x) \equiv 0$$

が分かるから

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これに $x = 0$ を代入すれば結論が得られる．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

$\Leftarrow$ を示す．仮定より

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

となる定数 k_1, k_2 がある．ここで

$$Y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

とおくと，これは初期条件 $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$ をみたす (2.1) の解となるので補題 B より $Y(x) \equiv 0$. これは $\{y_1(x), y_2(x)\}$ が関数として一次従属であることを意味する．[確かめ終]

これから定理 [1-1] ～ [1-3] の関数の組は一次独立である事が分かる。

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 D.]　$\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とすると (2.1) の任意の解 $y(x)$ はある定数 k_1, k_2 によって

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2\text{は任意定数})$$

と表される.

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[確かめ] $\left\{ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} \right\}$ はベクトルとして一次独立となるから

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

となる定数 k_1, k_2 がある．ここで

$$Y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

とおくと，これは初期条件 $Y(0) = y(0)$, $Y'(0) = y'(0)$ をみたす (2.1) の解となるので補題 B より $Y(x) \equiv y(x)$．これは

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \quad (x \text{ の恒等式})$$

であることを意味する．[確かめ終り]

これで [2] が分かった．

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[$D < 0$ の場合の実数値解の求め方]

特性解	: λ_1, λ_2(異なる複素数)
基本解系	: $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \cdots (\star)$
だから一般解は	: $y(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$, ($k_1, k_2$は任意の複素数)

これは複素数値をとる任意の解を表している．複素数値になるのが難点。
実数値をとる解のみを知りたい。

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

だから

$D < 0$ の場合の実数値解の求め方

特性解が

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \ (A, B \text{ は実数})$$

であるとき

$$\{e^{Ax} \cos\, Bx,\ e^{Ax} \sin\, Bx\}$$

も基本解系で一般解は

$$y = C_1\, e^{Ax} \cos Bx + C_2\, e^{Ax} \sin Bx$$

C_1, C_2 を実数の任意定数とするとすべての実数値の解、複素数の任意定数とするとすべての複素数値の解を表す。

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

a, b は実数だから特性解は互いに共役な複素数となるので

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \ (A, B \text{ は実数})$$

とおける。

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \cos Bx \ (= y_1(x) \text{ とおく}),$$
$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \sin Bx \ (= y_2(x) \text{ とおく})$$

も (重ね合わせの原理により)2 つとも解になる．また,

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{vmatrix} = B = \frac{\sqrt{-D}}{2} \neq 0$$

だから一次独立.