本日やること

1. 1．1 階常微分方程式
   - 1.5 非線形方程式
     - 完全微分型全微分方程式

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[2 変数の関数 f]

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数 を対応させる働きを 2 変数関数という。

$$f\ :\ (x, y) \mapsto z, \qquad z = f(x, y)$$

などと表す。

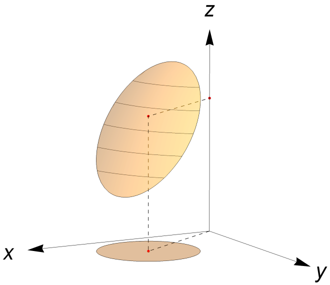
2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

のこと。(D は f の定義域)

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式



P(x, y, z) がグラフ上 $\iff$ $z = f(x, y)$

多くの場合曲面になる。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

2 変数関数の偏導関数

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

によって決まる 2 変数関数 $z = f_x(x,y)$ を $z = f(x,y)$ の x に関する偏導関数と呼び，記号

$$f_x(x,y),\quad \big(f(x,y)\big)_x,\quad f_x,\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

などで表す． 変数 y を定数とみなし変数 x のみで微分した導関数 である。
y に関する偏導関数も同様に定める。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[例] $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ のとき

$$f_x(x,y) = (x^2 + xy + y^2)_x = (x^2)_x + (xy)_x + (y^2)_x = 2x + y,$$
$$f_y(x,y) = (x^2 + xy + y^2)_y = (x^2)_y + (xy)_y + (y^2)_y = x + 2y.$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

陰関数と陰関数表示

2 つの変数 x, y が関係式

$$F(x,y)=0 \qquad (\star)$$

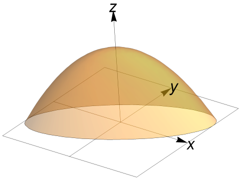
を満たしているとき, x の各値に対して $(\star)$ を満たすような y の値を対応させる関数

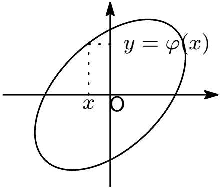
$$y=\varphi(x) \qquad (\star 2)$$

を $(\star)$ から決まる陰関数と呼ぶ．逆に $(\star 2)$ を関数 $\varphi(x)$ の陰関数表示と呼ぶ．定義により

$$F(x,\varphi(x))=0 \qquad (\star 3)$$

がすべての x に対して成り立つ．





1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

陰関数表示された関数の導関数

$F(x,y)$：連続微分可能

$F(a,b)=0$ かつ $F_y(a,b)\neq 0$

であるとき，(a,b) の近くで $F(x,y)=0$ から決まる陰関数 $y=\varphi(x)$ がただ 1 つ存在して $b=\varphi(a)$ であり，φ は微分可能で

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \tag{$\star$4}$$

を満たす．

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[$(\star 4)$ の考え方] 例で説明する。

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

とするとき

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 0 \tag{$\star 5$}$$

から決まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の導関数を求める。$(\star 5)$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$$

y は x の関数であるから $F(x,y)$ も x の関数となり

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) \\ &= 2x + \left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\left(\frac{d}{dx}y\right) + 2y\frac{d}{dx}y = 2x + y + (x+2y)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

だから

$$\varphi'(x) = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

これは

$x^2 + xy + y^2 = 0$ は微分方程式 $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$ のひとつの解

ということ。この微分方程式を

$$(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$$

と書くことがある。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

定義：全微分方程式・完全微分型

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (\star 6)$$

の形の微分方程式を全微分方程式という。とくに

$$\text{ある関数 } F(x,y) \text{ があって } \; F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0 \qquad (\star 7)$$

の形になっているとき完全微分型であるという。

完全微分型方程式の一般解

$$F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0 \qquad (\star 7)$$

の一般解は

$$F(x,y) = C \quad C \text{ は任意定数} \qquad (\star 8)$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

$(\star 8)$ が $(\star 7)$ の解であることは次のことから分かる。(1 年次の教科書を見てください)

2 変数関数の合成関数の微分法 (その 2)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "z_x"] & \\
t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\
& y \arrow[ur, "z_y"'] &
\end{tikzcd}$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[(ii) の確かめ]
t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) \\
\Delta y &= \psi(t+\Delta t) - \psi(t) \\
\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)
\end{aligned}$$

だけ変化する．ここで Lagrange の平均値の定理を使うと

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\Big) + \Big(f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\Big) \\
&= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \\
&\qquad 0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1
\end{aligned}$$

となる数 θ_1, θ_2 がある．

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[(ii) の確かめ (続き)]
この両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \to f_x(x, y) = z_x, \qquad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \to f_y(x, y) = z_y$$

となるので

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[($\star 8$) が ($\star 7$) の解であることの確かめ] ($\star 7$) の両辺を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0$$

y は x の関数であるから $F(x,y)$ も x の関数となり，右辺に合成関数の微分法 ($\star\star$) を使うと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x,y)&=F_x(x,y)\frac{dx}{dx}+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}\\&=F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "F_x"] & \\ x \arrow[ur, equal, "x_x"] \arrow[dr, "y_x"'] & & F(x,y) \\ & y \arrow[ur, "F_y"'] & \end{tikzcd}$$

だから

$$F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{すなわち} \quad F_x(x,y)\,dx+F_y(x,y)\,dy=0$$

1．1 階常微分方程式
1.5 非線形方程式

完全微分型の判定条件

$(\star 6)$ が完全微分型である必要十分条件は

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \tag{$\star$9}$$

であることである。このとき $F(x,y)$ を

$$F(x,y) = \int_a^x M(\xi,b)\,d\xi + \int_b^y N(x,\eta)\,d\eta \tag{$\star$10}$$

で定めると

$$F_x(x,y) = M(x,y), \quad F_y(x,y) = N(x,y) \tag{$\star$11}$$

となる。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[完全微分方程式が $(\star 9)$ を満たすことの確かめ]

[$(\star 9)$ のとき $(\star 10)$ は $(\star 11)$ を満たすことの確かめ]

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[例題] (1) $y\,dx + x\,dy = 0$ の一般解は $xy = C$

(2) $x\,dx + y\,dy = 0$ の一般解は $x^2 + y^2 = C$

(3) $\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$ の一般解は $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = C$