本日やること

1. 1．1 階常微分方程式
   - 1.5 非線形方程式
     - 変数分離型
     - 補足・発展
     - 同次型

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

復習　正規型 1 階微分方程式の初期値問題の解の存在定理

$f(x, y)$, $f_y(x, y)$ は xy 平面の領域 D で連続であるとし, $(x_0, a_0) \in D$ であるとする．このとき点 (x_0, a_0) を通る

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

の解曲線がただ一つ存在する.

[例　復習]　$f(x, y) = -f(x)y + r(x)$ のとき

$$y' + f(x)y = r(x) \quad \text{1 階線形方程式}$$

この具体的な解法は（前回までに述べたとおり）よく知られている。

今回 (解法が知られている) 非線形方程式の例をあげる。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

変数分離型方程式の定義

(1) で $f(x,y)=f(x)g(y(x))$ とした

$$y'(x)=f(x)g(y(x)) \quad (f,g \text{ は既知関数．}) \tag{13}$$

の形の微分方程式を変数分離型微分方程式という.
これは, (積分さえ計算できれば) よく知られた関数の範囲で解を得ることができる.

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[(13) の解法]

(Step 1) $g(y_0) = 0$ を満たす定数 y_0 をさがす．もしあれば，定数関数 $y(x) \equiv y_0$ は (13) の解となる．

(13) の解 $y(x)$ が「ある x_1 で $y(x_1) = y_0$ 」となったら，「すべての x で $y(x) \equiv y_0$」 である。なぜなら点 (x_1, y_0) を通る解曲線は 1 つしかないからである。

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

(Step 2) $y(x) = y_0$ とならない解を求める．((13) の解はある x で $y(x) \neq y_0$ ならばすべての x で $y(x) \neq y_0$ である.)

(Step 2-1) (13) の両辺を $g(y(x))$ で割る:

$$\frac{1}{g(y(x))}\frac{dy}{dx} = f(x).$$

(Step 2-2) 両辺を $\boldsymbol{x}$ で積分する:

$$\int \frac{1}{g(y(x))}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)\,dx + C.$$

(Step 2-3) 置換積分法をつかって左辺の積分変数を x から y に変換

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

この両辺の積分を計算したものが一般解である.

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[例] $y'(x) = y(x)(2 - y(x))\ \cdots\ (a)$ の一般解を求める.

(a) は (13) で $f(x) = 1$, $g(y) = y(2 - y)$ としたものである.

[Step 1] 定数関数 $y \equiv 0$, $y \equiv 2$ は (a) の解である.

[Step 2] 次に $y \neq 0, 2$ として両辺を $y(y-2)$ で割ると

$$\frac{1}{y(y-2)}\frac{dy}{dx} = -1.$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

両辺を x で積分すると

$$\text{左辺の積分} = \int \frac{1}{y(y-2)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{1}{y(y-2)}\, dy$$

部分分数に分解すると

$$= \int \left(\frac{1}{2(y-2)} - \frac{1}{2y} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log|y-2| - \frac{1}{2} \log|y| + C = \frac{1}{2} \log\left|\frac{y-2}{y}\right| + C.$$

$$\text{右辺の積分} = \int -1\, dx = -x + C.$$

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

両辺比較して

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y}\right| = -x + C$$
$$\log\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2x + 2C$$

両辺指数関数をとって

$$\left|\frac{y-2}{y}\right| = e^{-2x+2C} = e^{-2x}e^{2C}$$

$\frac{y-2}{y}$ は定符号だから

$$\frac{y-2}{y} = \pm e^{-2x}e^{2C}$$

$\pm e^{2C}$ を再び C とおいて

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2x}$$
$$y - 2 = Ce^{-2x}y$$

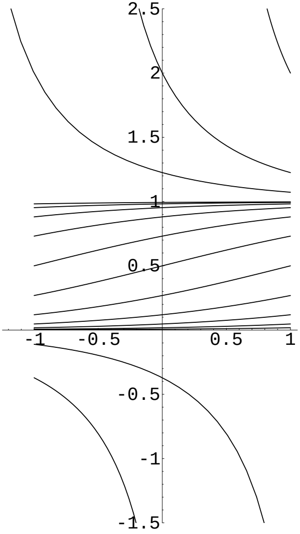
これを y について解くと

$$y = \frac{2}{1 - Ce^{-2x}} = \frac{2Ce^{2x}}{Ce^{2x} - 1}$$

これが一般解である．定数解 $y = 0$ は一般解に含まれるが $y = 2$ は含まれない．このような解を 特異解という．

1．1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式



1．1 階常微分方程式

1.6 補足・発展

[変数変換によって変数分離型に帰着される微分方程式　その 1]

同次型方程式の定義

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \qquad f \text{ は既知関数.}$$

の形の方程式を同次型方程式という。

[解法]　$u = \dfrac{y}{x}$ により変数を y から u へ変換して u の方程式に直すと,
$y' = (xu)' = u + xu'$ だから

$$u' = \frac{y' - u}{x} = \frac{f(u) - u}{x}$$

のように変数分離型になるから解ける.

1．1 階常微分方程式

補足・発展

[例]　$y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)} \quad \cdots \ (a)$ の一般解を求める.

$f(u) = -\frac{1}{u}$ だから微分方程式は

$$u' = -\frac{1+u^2}{xu}$$

のように変数分離型となる。

$$\frac{u}{1+u^2}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{u\,du}{1+u^2} = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log(1+u^2) + \log x = C \iff \log(x^2+y^2) = 2C$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = e^{2C} = C.$$

1．1 階常微分方程式

補足・発展

[変数変換によって変数分離型に帰着される微分方程式　その 2]

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c) \quad (f \text{ は既知関数, } a,\ b,\ c \text{ は定数.})$$

の形の方程式。

[解法] $u = ax + by + c$ により変数を y から u へ変換して u の方程式に直すと，変数分離型になる.

[例] $y'(x) = \dfrac{1}{x + y(x)} \quad \cdots \ (a)$ の一般解を求める.

$u = x + y$ とおくと $u' = 1 + y' = 1 + \dfrac{1}{u}$ だから

$$u - \log u = x + C \quad \text{したがって} \quad y - \log(x + y) = C.$$