本日やること

1. 1．1 階常微分方程式
   - 復習
   - 1.1 定数係数 1 階線形常微分方程式 (斉次型)
   - 1.1 定数係数 1 階線形常微分方程式 (非斉次型)

復習

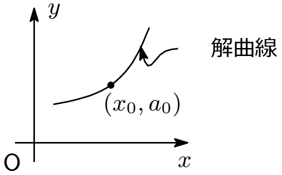
[正規型 1 階微分方程式の初期値問題]

$$(\star)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) & (\ f(x,y)\ \text{は}\ x,\ y\ \text{の連続関数}) \\ y(x_0) = a_0 & (\ x_0,\ a_0\ \text{は定数}) \end{cases} \tag{1}$$

定理 1.0　正規型 1 階微分方程式の初期値問題の解の存在定理

$f(x,y)$ の定義域に属する任意の (x_0, a_0) に対して

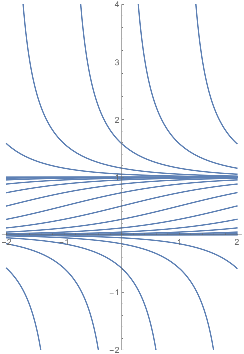
$f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 連続 $\Longrightarrow$ $(\star)$ の解がただ一つ存在する.



解のグラフを解曲線という。点 (x_0, a_0) をとおる解曲線がただひとつあるということ

復習

[例]



$y' = y - y^2$ の解曲線

定数係数 1 階線形常微分方程式

斉次型

定義

$$y'(x) + ay(x) = 0 \qquad (\text{a は定数}) \tag{2}$$

を斉次型定数係数 1 階線型常微分方程式という.

正規形 1 階方程式において $f(x, y) = -ay$ としたものである.

定理 1.1.

(2) の一般解は

$$y(x) = Ce^{-ax} \qquad (C \text{ は任意定数}) \tag{3}$$

であり他に解はない.

定数係数 1 階線形常微分方程式

斉次型

[定理の確かめ]

(Step 1) (3) が (2) の解であること: $\left(e^{-ax}\right)' = -ae^{-ax}$ であることから明らか.

(Step 2) (2) の解は (3) しかないこと: (2) は定理 **1.0** の条件を満たすので, 同じ初期条件を満たす解は一つしかない。
いま $y = Y(x)$ を (2) の解とする．これは初期条件 $y(0) = Y(0)$ を満たす (2) の解である.
一方, (3) で $C = Y(0)$ とした $y = Y(0)e^{-ax}$ も初期条件 $y(0) = Y(0)$ を満たす解であるから, $y = Y(x)$ と $y = Y(0)e^{-ax}$ は一致する．すなわち $Y(x) = Y(0)e^{-ax}$ である。

以上から (3) の形の解の他には解はない.

定数係数 1 階線形常微分方程式

初期値問題

定理 1.2.

a, x_0, y_0 を定数とするとき, 初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) + ay(x) = 0, & (4) \\ y(x_0) = y_0 & (5) \end{cases}$$

はただ一つの解

$$y(x) = y_0\, e^{-a(x-x_0)} \tag{6}$$

を持つ.

定数係数 1 階線形常微分方程式

初期値問題

[定理の確かめ] (2) の一般解は定理 1.1 より

$y(x) = Ce^{-ax} \cdots$ (3)

これが初期条件 (5) を満たすように C の値を決めればよい．(3) に $x = x_0$ を代入して

$$y(x_0) = Ce^{-ax_0}$$

(5) より

$$y_0 = Ce^{-ax_0}$$

だから

$$C = y_0 e^{ax_0}$$

これを (3) に代入して

$$y = y_0 e^{ax_0} e^{-ax} = y_0 e^{-a(x-x_0)}$$

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

定義

$$y'(x) + ay(x) = r(x) \quad (a \text{ は定数}, r(x) \text{ は既知関数}) \tag{7}$$

を非斉次型定数係数 1 階線型常微分方程式という.

正規形 1 階方程式において $f(x, y) = -ay + r(x)$ としたものである.

定理 1.3.

$r(x)$ を連続関数とする. (7) の一般解は

$$y(x) = \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C \right) e^{-ax} \quad (C : \text{任意定数}) \tag{8}$$

であり他に解はない.

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

[定理の確かめ]　(8) の両辺を微分

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right)' e^{-ax} + \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right) (e^{-ax})' \\
&= (r(x)\, e^{ax})\ e^{-ax} + \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right) (-ae^{-ax}) \\
&= r(x) - a\, y(x)
\end{aligned}
$$

だから (8) は (7) の解.

(8) の他に解がないことは, (7) が定理 **1.0** の条件を満たすことから導かれる.　□

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

[例 1.4]　$y'(x) + 2y(x) = 2x$ の一般解を求めよう.

準備 1. a が定数 $\Rightarrow$ $(e^{ax})' = ae^{ax}$

準備 2. 積の微分法 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

積分因子 e^{2x} を本質的に用いる.　e^{2x} を両辺にかけて

$$e^{2x}y'(x) + 2e^{2x}y(x) = 2xe^{2x}.$$

積の微分法により 左辺 $= \left(e^{2x}y(x)\right)'$ だから

$$\left(e^{2x}y(x)\right)' = 2xe^{2x}.$$

両辺積分して

$$e^{2x}y(x) = \int 2xe^{2x}\,dx + C.$$

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

右辺の積分は部分積分法により

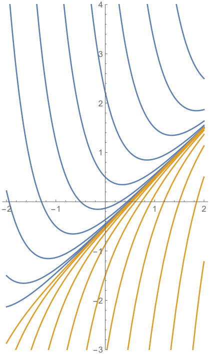
$$\int 2xe^{2x}\,dx = 2x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\,dx + C = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

であるから, 解は

$$y = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.$$

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型



$y' + 2y = 2x$ の解曲線