本日やること

前回の残り

1. 1 階常微分方程式
   - 1.0. 定義・正規型・存在定理
     - 定義
     - 正規型 1 階常微分方程式
     - 初期値問題の解の存在定理

1. 1 階常微分方程式

定義

常微分方程式の定義

x : 独立変数

$y = y(x)$: 未知関数

$y'(x)$, $y''(x)$, ... : 未知関数の導関数

これらの関係式 $F(x, y, y', y'', \cdots) = 0$ を y に関する常微分方程式という.

以後常微分方程式を単に微分方程式という.

1．1 階常微分方程式

定義

[常微分方程式の分類と用語]

常微分方程式の階数：含まれる導関数の階数の最大値

線形微分方程式：y, y', $y''\cdots$ に関して 1 次式であるような微分方程式

定数係数線形微分方程式：線形微分方程式の内 y, y', $y''\cdots$ の係数が定数であるようなもの

変数係数線形微分方程式：線形微分方程式の内 y, y', $y''\cdots$ の係数が定数でないようなもの

非線形微分方程式：y, y', y'' の 1 次式でないもの

一般に微分方程式の解は無数にあるが, これらを任意の値をとりうる定数 (これを任意定数とよぶ) を用いて一般的に表したものを一般解という.

一般解の任意定数に数値を代入して得られる解を特殊解という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

定義

正規型 1 階微分方程式の定義

x：独立変数 $y = y(x)$：未知関数

$f(x, y)$：x, y の連続関数

のとき

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

の形の微分方程式を正規型 1 階常微分方程式という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

初期条件・初期値問題

正規型 1 階微分方程式の初期値問題

x_0 を x のある特定の値 とするとき

$y(x_0)$ (これを初期値という)

の値を定めるような条件を初期条件という. 微分方程式と初期条件を組にした

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = a_0 \qquad (a_0\text{は定数}) \end{cases} \tag{2}$$

を微分方程式の初期値問題という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

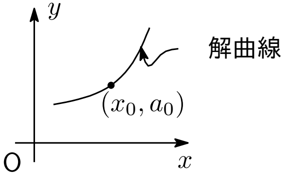
初期値問題の解の存在定理

定理 1.0 正規型 1 階微分方程式の初期値問題の解の存在定理

$f(x,y)$, $f_y(x,y)$ は xy 平面の領域 D で連続であるとし, $(x_0,a_0)\in D$ であるとする. このとき点 (x_0,a_0) の適当な近傍で初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = a_0 \end{cases} \tag{2}$$

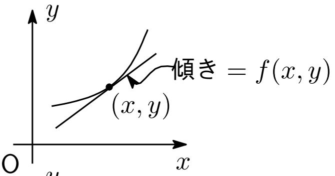
の解がただ一つ存在する.



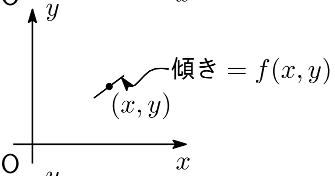
解のグラフを解曲線という。
定理は点 (x_0,a_0) をとおる解曲線がただひとつあるということ。
以下、方向場の考え方を使って説明する。

1．正規型 1 階常微分方程式

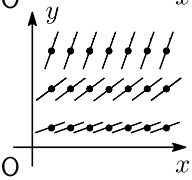
方向場



解曲線の，点 (x,y) における接線の傾きは $f(x,y)$



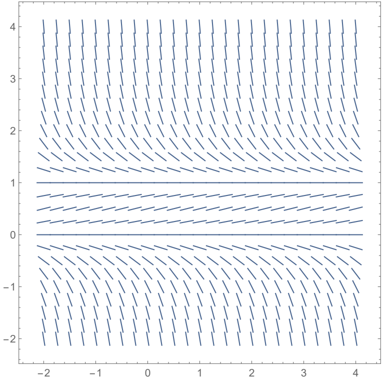
平面の点 (x,y) に傾き $f(x,y)$ の短い線分を書く



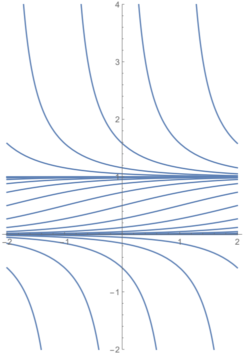
このことをすべての点に対して行ったものを方向場という。
各点で方向場に接する曲線が解曲線となるのである。

1. 正規型 1 階常微分方程式
例

[例：$y' = y - y^2$ の方向場と解曲線]



$y' = y - y^2$ の方向場



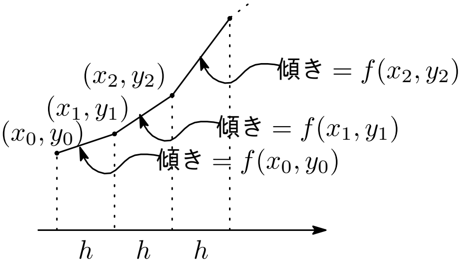
$y' = y - y^2$ の解曲線

1. 正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

[(i) (x_0, a_0) をとおる解曲線が少なくともひとつ存在すること.]

$f(x, y)$ が連続であるという条件は方向場が「連続である」ことを意味するので, 解曲線が存在することを証明することが可能である. 詳細は省略するが, 例えば



$$x_{i+1} = x_i + h,$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$i = 0, 1, \cdots$$

で決まる点列

(x_0, y_0) (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \cdots$

を結んでできる折れ線を Cauchy の折れ線という。これは (1) の近似解であり、$h \to 0$ として極限をとると（部分列が）真の解に収束することが示せる。

1．正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

[(ii) 一点をとおる解曲線はひとつしかないこと.]
$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ を (2) の 2 つの解とする. $x > x_0$ で考える.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(y_1(x) - y_2(x))^2 &= 2(y_1'(x) - y_2'(x))(y_1(x) - y_2(x)) \\
&= 2(f(x, y_1) - f(x, y_2))(y_1(x) - y_2(x)) \\
&\leqq 2|f(x, y_1) - f(x, y_2)||y_1(x) - y_2(x)| \\
&\leqq 2C(y_1(x) - y_2(x))^2
\end{aligned}
$$

$\leqq$ の確かめ： $y \mapsto f(x, y)$ に平均値の定理を使うと, 適当な数 $y_1 < \xi < y_2$ により

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1(x) - y_2(x))$$

また, $f_y(x, y)$ は連続だから適当な x_0 の近傍で有界であり, ある数 C があって $|f_y(x, y)| \leqq C$ とできるから

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq C|y_1(x) - y_2(x)|$$

1. 正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

両辺に e^{-2Cx} をかけて移項すると

$$e^{-2Cx}\frac{d}{dx}(y_1(x)-y_2(x))^2-2Ce^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2\leqq 0$$

ところで積の微分法により

$$\text{左辺}=\frac{d}{dx}\left(e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2\right)$$

だから $e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2$ は単調減少であることが分かる．したがって

$$e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2\leqq e^{-2Cx_0}(y_1(x_0)-y_2(x_0))^2=0$$

つまり

$$x > x_0 \text{ ならば } \quad y_1(x) = y_2(x)$$

だから (2) の解はひとつしかない.

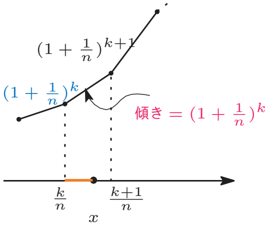
1. 正規型 1 階常微分方程式

例

[例題]　初期値問題

$$(\star) \quad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

の解を Cauchy の折れ線を用いて作る。



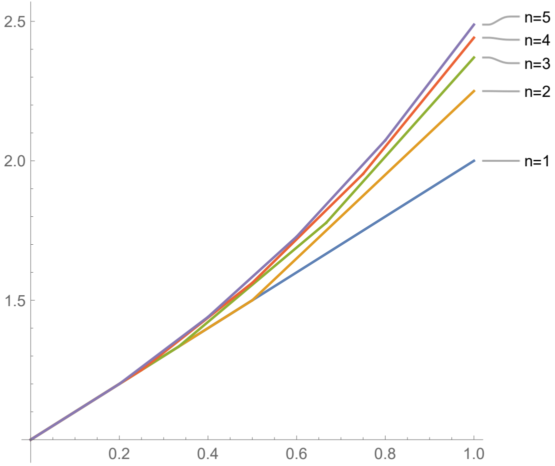
(i)　Cauchy の折れ線は, $h = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$ として

$$f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]}\left(x - \frac{[nx]}{n}\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]}\left(1 + x - \frac{[nx]}{n}\right)$$

である. ただし, $x > 0$, $[t] = t$ を超えない最大の整数

1. 正規型 1 階常微分方程式

例



1. 正規型 1 階常微分方程式

例

(ii) $f_n(x)$ は n を固定するごとに x について単調増加。

$$\text{各小区間 } \frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n} \text{ で 傾き} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k > 0 \quad \text{だから明らか。}$$

(iii) $f_n(x)$ は x を固定するごとに n について単調増加。

少し複雑であるので省略

1. 正規型 1 階常微分方程式

例

(iv) $f_n(1) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 3$ かつ単調増加だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が存在する。これを Napier の数 とよび e であらわす。

(v) 同様の理由で $0 \leqq x \leqq 1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する。これを $f_\infty(x)$ であらわす。

(vi)
$$
\begin{aligned}
f_\infty(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]} \lim_{n\to\infty}\left(1+x-\frac{[nx]}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]}
\end{aligned}
$$

なぜなら $n \to +\infty$ のとき

$$
\left|\frac{[nx]}{n}-x\right| = \left|\frac{[nx]-nx}{n}\right| = \frac{|[nx]-nx|}{n} \leqq \frac{1}{n} \to 0 \text{ だから } \frac{[nx]}{n} \to x
$$

1. 正規型 1 階常微分方程式

例

(vii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{[nx]}{n}} = e^x$ だから

$f_\infty(x) = e^x$

($u(t,x) = t^x$ が t と x の 2 変数関数として連続であることを用いた。)

(viii) $\displaystyle \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{[n(x+\frac{1}{n})]} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]}}{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[nx]}$ の両辺の極限をとって

$f'_\infty(x) = f_\infty(x)$

[まとめ]

(i) 初期値問題 ($\star$) の解を Cauchy の折れ線を使って作った。

(ii) ($0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で) この解は e^x であることが分かった。とくに, $(e^x)' = e^x$ であることが分かった。