本日やること

1. ガイダンス
2. 0. 微分方程式とはどういうものか
   - 定義
   - 何をするために使うか

ガイダンス

科目の内容：微分方程式とその応用

0. 微分方程式とはどういうものか

1. 1 階常微分方程式

   正規型 1 階常微分方程式
   定数係数 1 階線型常微分方程式 (斉次型, 非斉次型, 未定係数法)
   変数係数 1 階線型常微分方程式 (斉次型, 非斉次型)
   非線形方程式 とくに 変数分離型・完全微分型・Bernoulli・Riccati・Lagrange・Clairaut の方程式

2. 2 階線型常微分方程式

   定数係数線型方程式 (斉次型, 非斉次型, 未定係数法)

3. 解析的な微分方程式・特殊関数
4. 線型連立微分方程式系

ガイダンス

授業の進め方

講義はスライドを使う。スライドは事前に小山のホームページ
http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama
に上げておくからできるだけ事前にプリントアウトしておくこと。ノートを作ってください。プリントアウトしたスライドに書き込むと楽である。
演習問題を配付するから、それを解いて必ず提出すること。

評価

試験（中間と期末）と演習プリントの提出で評価する。

0. 微分方程式とはどういうものか

0.1. 定義

[方程式とは]

未知数 x の関係式

例 ： $x^2 - 3x + 2 = 0$

解 ： $x = 1$ と $x = 2$

[常微分方程式 とは]

独立変数 ： x
未知関数 ： $y(x)$
その導関数 ： $y'(x), y''(x), \cdots$
の関係式

例 ： $y'(x) = 3y(x)$

解 ： $y(x) = C\, e^{3x}$
(C は任意の定数)

0. 微分方程式とはどういうものか

0.1 定義

[偏微分方程式とは]
独立変数：x, y
未知関数：$u(x, y)$
その偏導関数：$u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), \cdots$
の関係式

例： $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$

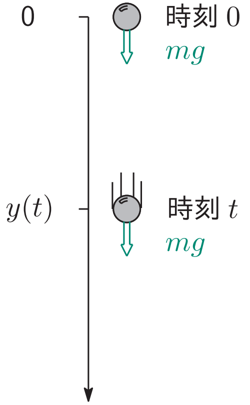
解： $u = \log(x^2 + y^2)$ 等々

今回は触れない。

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 落体の運動

[落体の運動：1. 真空中の場合]　時刻 0 に座標原点で金属球をそっと落とす。



時刻：t [s]
球の質量：m [kg]
時刻 t での座標：$y(t)$ [m]
時刻 t での速度：$v(t)$ [m/s]
時刻 t での加速度：$a(t)$ [m/s^2]
(y, v は下向きを正として測る.)

とすると

$$v(t) = y'(t), \qquad a(t) = y''(t)$$

であるが

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．　落体の運動

運動方程式 ＝ Newton の運動法則の 3 番目

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる．

今の場合 $F = mg$ 　($g \fallingdotseq 9.8[\mathrm{m/s}]$ は重力加速度) だから

$$my''(t) = mg \quad \text{従って} \quad y''(t) = g$$

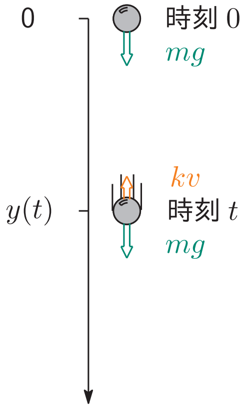
解は　$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v(0)t + y(0) \quad [\mathrm{m}]$$

$y(0) = v(0) = 0$ だから　$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad [\mathrm{m/s}]$$

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．落体の運動

[落体の運動：2. 速度に比例して空気抵抗が働く場合]



上向きに $kv(t)$ $(k > 0$ は比例定数)
の空気抵抗が働くとき

物体に働く力 は $F = mg - kv(t)$

だから運動方程式は

$$my''(t) = mg - ky'(t)$$

従って

$$my''(t) + ky'(t) - mg = 0$$

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．落体の運動

解は

$$y = \frac{mg}{k}\left(\left(\frac{v(0)}{g} - \frac{m}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + t\right) + y(0) \quad [\mathrm{m}]$$

特に，$y(0) = v(0) = 0$ とすると

$$y = \frac{mg}{k}\left(t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right) \quad [\mathrm{m}]$$

今回は解法は述べない。

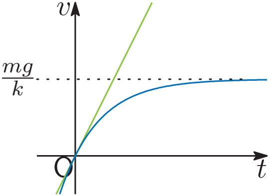
0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 落体の運動

[落体の運動 3. 速度の比較]
速度 v を比較しよう。

真空中の場合

$$v(t) = gt \quad [\mathrm{m/s}] \quad \to \infty$$



速度に比例して空気抵抗が働く場合

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \leqq \frac{mg}{k} \quad [\mathrm{m/s}]$$

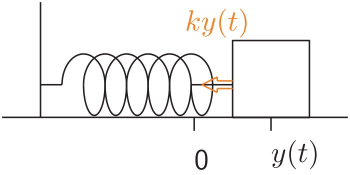
速度の上限は k によって決まるが, k は物体の密度, 形状などで変わってくる. 参考までに雨滴の速度は次のようである. (広島市江波山気象館資料)

直径 [mm]	0.02	0.15	0.5	1	2	3
速度 [m/s]	0.01〜2	0.5	2.2	4	6.2	7.8

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 単振動

[単振動 1. 弾性体の振動]



時刻 : t [s],
物体の質量 : m [kg],
物体の時刻 t での位置 : $y(t)$ [m]
(位置, 速度は右向きを正として測る.)

原点は ばねの自然長の位置とする
働く力はバネの弾性力 : $-ky(t)$ [N]
($k > 0$ 弾性定数)

運動方程式は

$$my''(t) = -ky(t)$$

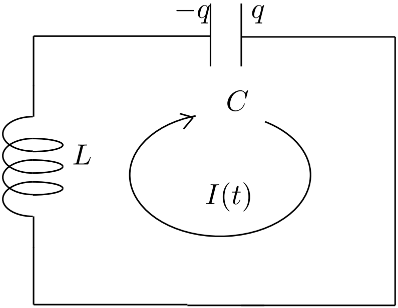
解は

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{または} \quad y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．単振動

[単振動 2. 電気回路の振動]



図のような回路に時刻 t で流れる電流 $I(t)$ は微分方程式

$$I''(t) + LCI(t) = 0$$

を満たす事が分かる．(後で詳しく述べる予定.) これは前節の方程式と同じ形をしているので解は

$$I = C_1 \cos\sqrt{LC}t + C_2 \sin\sqrt{LC}t \quad \text{または}$$

$$y = A\sin\left(\sqrt{LC}t + \varphi\right)$$

(C_1, C_2, A, φ は $I(0)$, $I'(0)$ から決まる数)

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 生物個体群の成長

[生物個体群の成長]

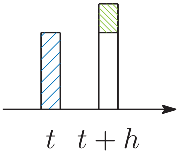
時刻：t [h]

(微少な) 時間の増分：Δt [h]

ある微生物の個体数 (連続量と見なす)：$y = y(t)$ [億個]

とするとき

$$u(t, \Delta t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)}$$ ：個体数の伸び率



とおく.

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．生物個体群の成長

[生物個体群の成長 1. 増殖率一定の場合]

$u(t,\Delta t)$ が t によらず Δt のみで決まるとする。(これを $u(\Delta t)$ で表す)

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{u(\Delta t)-u(0)}{\Delta t}y(t)$$

$\Delta t\to 0$ とすると

$$y'(t)=u'(0)y(t)$$

$u'(0)$ を増殖率とよぶ. $u'(0)=k$ とおくと解は

$$y=y(0)e^{kt}$$

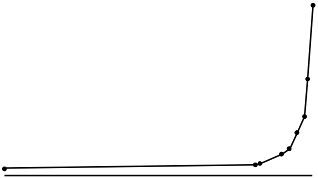
0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 生物個体群の成長

この解の伸び率は t によらず一定である.

[確かめ] $u(t,\Delta t) = \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{y(t)} = \dfrac{e^{k(t+\Delta t)} - e^{kt}}{e^{kt}} = e^{k\Delta t} - 1$

参考：人類の総人口の増加



年次 (西暦)	0	1630	1660	1800	1850	1900	1950	1970	2004
人口 (億人)	2.5	4	4.45	8	10	16	22	36.2	63.3

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか. 生物個体群の成長

[生物個体群の成長 2. 個体数が大きくなると増殖率が小さくなる場合]

増殖率を $k - ly(t)$ (l は正の定数) に変えると

微分方程式は　$: y'(t) = (k - ly(t))y(t)$　(ロジスティック方程式)

解は　$: y = \dfrac{y(0)}{\left(1 - \frac{l}{k}y(0)\right)e^{-kt} + \frac{l}{k}y(0)}$

$y(0) \leqq \frac{k}{l}$ のとき

$$\leqq \frac{k}{l}$$

0. 微分方程式とはどういうものか

0.2. 何をするために使うか．数学モデル

まとめ：数学モデル

1. 微分方程式によっていろいろな現象に現れる量の変化の仕組みを言い表すことができる．これをその現象の数学モデルという．
2. 特に物体とそれに働く力が分かっているような場合には，運動方程式によってモデルを作ることができる．
3. そのモデルを解くことによってその現象の変化を予測することができる．
4. 解と実際の現象がかけ離れているときは，より精密なモデルを作り直して再度比較すればよい．

0. 微分方程式とはどういうものか

余談

エライじゅんばん

微分方程式を立てることができる (数学モデルを作ることができる) 人

$>$ 微分方程式の (数学モデルの) 意味を理解できる人

$>$ 与えられた微分方程式を解ける人

よろしく。