No12. 解説

問.

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式をといて固有値を求める.

$$|\lambda E - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 = 0$$

固有値 : $\lambda = 1 \pm i$

固有ベクトル $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (1 \pm i) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を解けばよい.

$$\begin{cases} u - v = (1 \pm i)u \\ u + v = (1 \pm i)v \end{cases}$$

同じものだから不定方程式である。

$-v = \pm iu, \quad v = \mp iu,$

$u = 1$ 代入すると $v = \mp i$.

$1+i$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$1-i$ 〃 〃 $\begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$

基本解：$\left\{ e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\ e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \right\}$

一般解：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = C_1 e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ (*)

C_1, C_2：任意の(複素)定数.

実数値の解を求めるには.

$$(*) = \begin{pmatrix} C_1 e^t(\cos t + i\sin t) + C_2 e^t(\cos t - i\sin t) \\ -iC_1 e^t(\cos t + i\sin t) + iC_2 e^t(\cos t - i\sin t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (C_1+C_2) e^t \cos t + (C_1-C_2) i e^t \sin t \\ -i(C_1-C_2) e^t \cos t + (C_1+C_2) e^t \sin t \end{pmatrix}$$

ここで　$C_1+C_2 = D_1$, $i(C_1-C_2) = D_2$　とおくと

$$\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix} = \underset{\text{正則行より}}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & -\frac{i}{2}\\ \frac{1}{2}, & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix}$$

だから　D_1, D_2 も任意の複素な値をとる。

$$= \begin{pmatrix} D_1 e^t \cos t + D_2 e^t \sin t \\ -D_2 e^t \cos t + D_1 e^t \sin t \end{pmatrix}$$

D_1, D_2 を任意の実数の定数とすると，実数値の一般解となる。

$x(0)=1$, $y(0)=0$ をみたす解は

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから. $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} \quad //$$