No 6.

(1) $y' = \underbrace{y^2}_{g(y)}$.

(Step1); $y=0$ はひとつの解である。

(Step2) $y \neq 0$ である解をさがす。

$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 1$ 　両辺 y^2 でわる.

$\int \frac{1}{y^2}\cancel{\frac{dy}{dx}}\cancel{dx} = \int 1\,dx.$ 両辺 x で積分.

置換積分 $\longrightarrow$

$$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{y}$$

$$\int 1\,dx = x + C.$$

$-\frac{1}{y} = x + C, \Leftrightarrow y = \frac{-1}{x+C}$ (C: 任意定数)

これが一般解である。

(2) $y' = \dfrac{1-y^2}{x}$

(Step 1) $1-y^2=0$ となるのは $y=\pm 1$ のときであり

$y \equiv 1$, $y \equiv -1$ は、ひとつの解となる。

その他の解は、けっして ± 1 の値をとらない。

(Step 2) $y \neq \pm 1$ である解を求める。

$$\frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

両辺 x で積分して

$$\int \frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx.$$

置換積分により

$$\int \frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{1-y^2}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C.$$

部分分数分解すると $\dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+y}$ となるから

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} = -\frac{1}{2}\log|1-y| + \frac{1}{2}\log|1+y|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

だから $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$ =

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \underbrace{\underbrace{2\log|x|}_{\log x^2} + \underbrace{C}_{\log e^{C}}}_{\log(e^{C}\cdot x^2)}$$

したがって.

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{C}x^2.$$

$\frac{1+y}{1-y}$ は符号が一定だから

$$\frac{1+y}{1-y} = \underbrace{\pm e^{C}}_{再び C とおく.}x^2$$

$$y(1+Cx^2) = Cx^2-1$$

$$y = \frac{-1+Cx^2}{1+Cx^2}$$

y について といて.

$$y = \frac{-1+Cx^2}{1+Cx^2}$$

これが一般解

(3) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ だから同次型。

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと、 $y = xu$。

微分して $y' = u + xu'$

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u}$$

$$u' = \frac{(1+u) - u(1-u)}{(1-u)x} = \frac{1+u^2}{(1-u)x}$$

$\dfrac{1-u}{1+u^2} u' = \dfrac{1}{x}$ 変数分離する。

両辺 x で積分

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x}$$

左辺 $= \displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u\,du}{1+u^2}$ $\left(\begin{array}{l} 1+u^2 = v \text{ とおくと.} \\ 2u = \dfrac{dv}{du} \quad u\,du = \dfrac{dv}{2} \end{array} \right)$

$= \tan^{-1} u - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dv}{v}$

$= \tan^{-1} u - \dfrac{1}{2}\log(1+u^2)$

右辺 $= \log|x|$

$$\tan^{-1}u = \frac{1}{2}\log(1+u^2) + \log|x| + C.$$

$$2\tan^{-1}u = \log(1+u^2) + 2\log|x| + 2C.$$

$$\underbrace{\overset{\shortparallel}{\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} \quad \overset{\shortparallel}{\log x^2}}$$

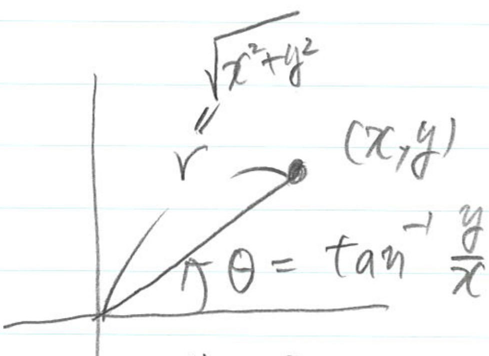
$$\log\left[\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\times x^2\right]$$

$$\shortparallel$$

$$\log(x^2+y^2) = 2\log e^c.$$

$$\tan^{-1}u = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\times e^c\right)$$

ここで極座標になおすと



だから

$$\theta = \log(e^c r).$$

$$e^\theta = e^c r$$

$$r = e^\theta e^{-c} = e^{\theta - c}$$ //

これが一般解.

ベルヌイ らせん という。