機械系の微分方程式 演習問題 No.4 解説

以下 x を独立変数 y を未知関数とする.

問題 1　(1) $y'-(\sin x)y = 0$ の一般解を求める.

$\displaystyle\int(-\sin x)\,dx = \cos x + C$ だから積分因子は $e^{\cos x}$ とすればよい。これを両辺にかけて

$$y' e^{\cos x} - \sin x\, e^{\cos x}\, y = 0$$

$(e^{\cos x})' = -\sin x e^{\cos x}$ だから

$$y' e^{\cos x} + y\,(e^{\cos x})' = 0$$

積の微分法により

$$(y e^{\cos x})' = 0$$

両辺積分して

$$y e^{\cos x} = \int 0\,dx = C$$

両辺積分因子で割って

$$y = Ce^{-\cos x} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

(2) $y' - (\sin x)y = \sin x$ の一般解を求めよ.

両辺に積分因子 $e^{\cos x}$ をかけて

$$y' e^{\cos x} - \sin x\, e^{\cos x}\, y = \sin x\, e^{\cos x}$$

(1) と同様に

$$(y e^{\cos x})' = \sin x\, e^{\cos x}$$

両辺積分して

$$y e^{\cos x} = \int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$$

$\cos x = t \cdots (\star)$ とおいて右辺を置換積分する。$(\star)$ の両辺を x で微分して $-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$. 両辺に $-dx$ をかけて $\sin x\, dx = -dt$. これらを右辺の積分に代入して

$$\text{右辺} = \int \sin x e^{\cos x}\, dx = \int e^{t}\,(-dt) = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

両辺積分因子で割って

$$y = -1 + Ce^{-\cos x} \quad (C\text{ は任意の定数})$$

これが一般解である。

(3) (2) の微分方程式の, 初期条件 $y(0) = 0$ を満たす特解を求めよ.

$x = 0$ のとき $y = 0$ となるのだから $x = 0,\ y = 0$ を一般解に代入すると

$$0 = -1 + Ce^{-\cos 0} = -1 + Ce^{-1}$$

したがって $C = e$ だから初期条件を満たす特殊解は

$$y = -1 + e^{1-\cos x}$$