No3 解説

1. (1)

$$y' + \boxed{a}\, y = 0 \quad \cdots ①$$

(⇔ $y' = -ay$ ⇔ $y = Ce^{-ax}$ は常識！)

積分因子の方法で解く。

$\boxed{e^{\boxed{a}x}}$ を①の積分因子という。

積分因子を両辺にかける。

$$\underbrace{y'\boxed{e^{ax}} + \underbrace{a\boxed{e^{ax}}}_{(e^{ax})'}\, y}_{\left(\boxed{y e^{ax}}\right)'} = \boxed{0}$$

積の微分法.

$$\boxed{\boxed{F'(x)} = \boxed{f(x)} \Leftrightarrow \int \boxed{f(x)}\,dx = \boxed{F(x)} + C}$$

両辺積分.

$$\boxed{y e^{ax}} = \int \boxed{0}\,dx = C.$$

両辺 ÷ e^{ax}.

$$y = \frac{C}{e^{ax}} = Ce^{-ax}. \quad //$$

(2) $y' + ay = b$, ① $(a, b$：定数$)$

積分因子 $\boxed{e^{ax}}$ を両辺にかける。

$$\underbrace{y'\boxed{e^{ax}} + \underbrace{a\boxed{e^{ax}}}_{(e^{ax})'}y}_{(ye^{ax})'} = b\boxed{e^{ax}}$$

積の微分法

$$\Leftrightarrow \quad (ye^{ax})' = be^{ax}$$

両辺積分

$$ye^{ax} = \int be^{ax}\,dx$$

$$= b\int e^{ax}\,dx$$

$$= b \times \left(\frac{e^{ax}}{a} + C\right)$$

両辺 $\div e^{ax}$

訂正

$$y = \frac{b}{a} + \boxed{bC}e^{-ax}$$

$b \neq 0$ ならば

じつは Cは任意定数であるから bCを再び
Cと書いても同じことである。
$b=0$のときは (1) と同じ

(3) $y' + ay = x + 1$ の一般解.

積分因子を両辺にかけて.

$$\underbrace{y'\boxed{e^{ax}} + a\boxed{e^{ax}}y}_{=(y\boxed{e^{ax}})'} = (x+1)\boxed{e^{ax}}$$

両辺積分.

$g(x)$ $f'(x)$ とおく.

$$ye^{ax} = \int \underset{g(x)}{(x+1)}\,\underset{f'(x)}{e^{ax}}\,dx \quad \cdots ☆$$

ここで

部分積分法: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

積分

微分.

をつかう。

$f'(x) = e^{ax}$ だから $f(x) = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$ $(+C)$

$$☆ = \frac{1}{a}e^{ax}(x+1) - \int \frac{1}{a}e^{ax}\cdot 1\,dx$$

$$= \frac{x+1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C$$

両辺 $\div e^{ax}$.

$$y = \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2} + Ce^{-ax}$$ //