

機械系の微分方程式 演習問題 No.1 解答

問題 1 (1) $y = 2x^2 + C$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'(x) = 4x$ の解であることを確かめよ.

$$y' = 4x \cdots \textcircled{1} \quad y = 2x^2 + C \cdots \textcircled{2} \text{ とする.}$$

②の両辺を微分すると C は定数だから

$$y' = (2x^2 + C)' = 4x + (C)' = 4x$$

これは①だから, ②は①の解である.

(2) $y = Ce^{4t}$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'(t) = 4y(t)$ の解であることを確かめよ.

$$y' = 4y \cdots \textcircled{1} \quad y = Ce^{4t} \cdots \textcircled{2} \text{ とする.}$$

②の両辺を微分すると C は定数だから

$$y' = (Ce^{4t})' = C(e^{4t})'.$$

ここで $4t = s$ とおき, 合成関数の微分法を使うと

$$(e^{4t})' = \frac{d}{dt} e^{4t} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} e^s = 4e^s = 4e^{4t}$$

だから $y' = 4Ce^{4t}$.

ここで ② により右辺は $= 4y$ だから

$$y' = 4y.$$

これは, ①だから, ②は①の解である.

問題 2

(1) $y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \cdots \textcircled{2}$ (C_1, C_2 は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'' = g \cdots \textcircled{1}$ の解であることを確かめよ.

② を繰り返し微分すると

$$y' = gt + C_1,$$

$$y'' = g.$$

で ① となるから ② は ① の解である.

(2) 真空中で金属球を自由落下させたとき, 10 秒後までに落ちる距離とそのときの速度を求めよ。 $y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$

であるが $y(0) = 0, v(0) = 0$ だから $C_1 = C_2 = 0$ となるので

$$y = \frac{1}{2}gt^2.$$

だから

$$v(t) = y'(t) = gt.$$

10秒後の速度は $v(10) = 9.8 \times 10 = 98[m/s] = 352[km/h]$ 。新幹線並みである。

10秒後の落下距離は $y(10) = 490[m]$ 。ちなみにスカイツリーの高さは643[m]。あそこでものを落としてはいけません。

(3) $y = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) \right)$ は常微分方程式 $my'' + ky' = mg$ の解であることを確かめよ。

$$my'' + ky' = mg \cdots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) \right) \cdots \textcircled{2}$$

とする。②を微分すると

$$y' = \frac{mg}{k} \left(1 + \frac{m}{k} \left(-\frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} - 0 \right) \right) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}),$$

$$y'' = \frac{mg}{k} \left(0 - \left(-\frac{k}{m} \right) e^{-\frac{k}{m}t} \right) = g e^{-\frac{k}{m}t}.$$

これらを①へ代入すると

$$\textcircled{1} \text{の左辺} = m \left(g e^{-\frac{k}{m}t} \right) + k \left(\frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \right) = mg = \textcircled{1} \text{の右辺}.$$

だから①が成り立つ。だから②は①の解である。

問題 3 k, l を定数とするとき $y = \frac{k}{Ce^{-kt} + l} \cdots \textcircled{2}$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は常微分方程式 $y'(t) = (k - ly(t))y(t) \cdots \textcircled{1}$ の解であることを確かめよ。

②を微分すると

$$y' = \frac{(k)'Ce^{-kt} + l - k(Ce^{-kt} + l)'}{(Ce^{-kt} + l)^2} = \frac{+k^2 Ce^{-kt}}{(Ce^{-kt} + l)^2}.$$

一方①の右辺に②を代入すると

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{の右辺} &= \left(k - \frac{kl}{Ce^{-kt} + l} \right) \frac{k}{Ce^{-kt} + l} = k(Ce^{-kt} + l - l) \frac{k}{(Ce^{-kt} + l)^2} \\ &= \frac{k^2 Ce^{-kt}}{(Ce^{-kt} + l)^2} \end{aligned}$$

だから①が成り立つ。だから②は①の解である。