微積分のまとめ

1.1. 積の微分法.

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

1.2. 商の微分法.

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

1.3. 合成関数の微分法.

$$y = g(t), t = f(x) \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

[例.] $y = e^{ax+b}$ ($a,\ b$ は定数) のとき $ax + b = t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{de^t}{dt}\frac{d(ax+b)}{dx} = e^t \times a = ae^{ax+b}.$$

2.1. 積分変数の変換. (置換積分法.) $x = g(t)$ であるとき積分変数を x から t に置き換えるには

$$dx = \frac{dx}{dt}dt \quad \text{だから} \quad \int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt.$$

また t が a から b まで変動するとき x は $g(a)$ から $g(b)$ まで変動するので

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))\frac{dx}{dt}dt.$$

[例.] $ax + b = t$ ($a \neq 0, b$; 定数) とすると

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{a}dt \text{ だから } \int e^{ax+b}dx = \int e^t\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}e^{ax+b}.$$

また $x = \arctan t$ とすると

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \frac{dt}{1+t^2} \text{ だから } \int \frac{dt}{1+t^2} = \int dx = x = \arctan t.$$

2.2. 部分積分法. 1.1 の両辺を積分して

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx, \text{ あるいは } \int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx.$$

3.1. 指数関数と対数関数.

指数法則 $e^{a+b} = e^a e^b,\ \ e^{ab} = (e^a)^b.$

対数法則 $\log AB = \log A + \log B,\ \ \log\dfrac{A}{B} = \log A - \log B,\ \ \log A^k = k\log A,$ ただし $A, B \neq 0.$

指数と対数の関係 $a = e^b \Leftrightarrow b = \log a$ だから $e^{\log a} = a, \log e^b = b.$

導関数 $(e^x)' = e^x,\ \ (\log|x|)' = \dfrac{1}{x}.$

原始関数 $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x,\ \ \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|,\ \ \int \log x\,dx = x\log x - x.$

3.2. 三角関数.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x},$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$(\sin x)' = \sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos x$ だから $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}).$

$(\cos x)' = \cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin x$ だから $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2}).$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

3.3. 逆三角関数.

$\arcsin x = y \ \Leftrightarrow \sin y = x$ ただし $-1 \leqq x \leqq 1,\ \dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}.$

$\arccos x = y \ \Leftrightarrow \cos y = x$ ただし $-1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \pi.$

$\arctan x = y \ \Leftrightarrow \tan y = x$ ただし $-\infty < x < \infty,\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}.$

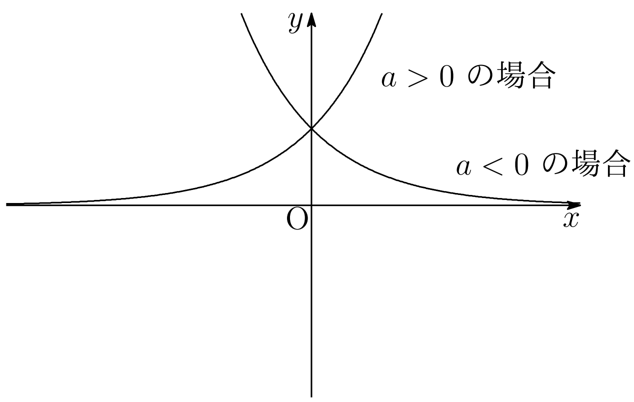
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

3.4. べき関数.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ \ (\alpha;$定数$).$

$\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ \ (\alpha \neq -1;$定数$).$

$\displaystyle\int x^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \log x.$



$y = e^{ax}$ のグラフ