2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式 : 交流回路への応用

[本日やること]

1. 電気回路 (LCR 回路) に交流起電力を加えたとき回路に流れる電流を, 微分方程式を解くことによって求める. (再説)

2. その強制振動部分の簡易解法を述べる. (再説)

誤りがあったのでやり直します。

2. 2 階線形常微分方程式

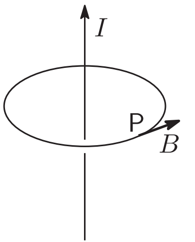
定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

初めに主な素子の働きを検討する.

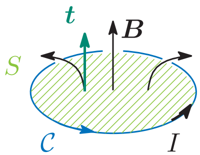
2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[回路素子の働き 1. コイル]



直線電流 I の近くには図のような円形の磁界 $\boldsymbol{B}$ ができる. I, $\boldsymbol{B}$ の向きは右ねじの進む向きと回る向きである。(アンペールの右ねじの法則)



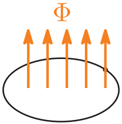
閉じた曲線 $\mathcal{C}$ がありそれによって囲まれた曲面を S とする。S の正の向き（つまり表向き）を決めるとき, 境界 $\mathcal{C}$ の正の方向は S の表側を左に見て回る向きと決める。これが標準的な向き付けである。

電流が $\mathcal{C}$ 上を正の向きに流れるときはこれによる磁力線は図のように S を横切って裏から表にわき出してくる. これが電磁石の原理である.

$\Phi = \displaystyle\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ ($\boldsymbol{n}$ は S の単位法ベクトル) を磁束という. Φ は S を変形しても $\mathcal{C}$ が境界である限り不変である.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用



またこのとき標準的な向き付けに従うならば

$$\Phi = LI \qquad (L > 0 \text{ は自己誘導係数})$$

の関係がある．
逆に，(近くで磁石を動かしたりすることによって) Φ が時間的に増加するとき，C には Φ の増加を打ち消そうとする向きに電流を流そうとする力 (起電力) E が生じる．これは回路の負の向きの力であるから

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{(Lenz の法則)}$$

である．これが発電機の原理である．この 2 つをあわせると

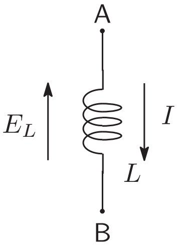
$$E = -L\frac{dI}{dt}$$

がわかる．これを電磁誘導 (自己誘導) 現象という．

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[回路素子の働き 1．コイル]



I：電流　(図の向きを正として測る)

L：コイルのインダクタンス

E_L：コイルの両端の電位差
(＝ A の電位 − B の電位)

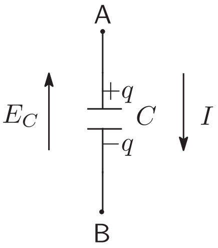
とすると自己誘導により (向き付けが逆になるので)

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[回路素子の働き 2. コンデンサ]



C：コンデンサの静電容量

q：極版の電荷　(電流の流れ込む側を正として測る)

E_C：コンデンサの両端の電位差
(= A の電位 − B の電位)

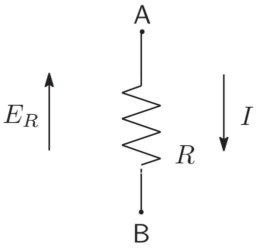
とすると静電誘導により

$$E_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int I\,dt$$

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[回路素子の働き 3. 抵抗器]



R： 抵抗器の電気抵抗

E_R： 抵抗器の両端の電位差
(= A の電位 − B の電位)

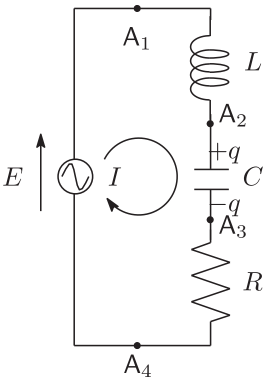
とするとオームの法則により

$$E_R = RI$$

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[LCR 回路の動作]



$E =$ A_1 の電位 $-$ A_4 の電位

$E_L =$ A_1 の電位 $-$ A_2 の電位

$E_C =$ A_2 の電位 $-$ A_3 の電位

$E_R =$ A_3 の電位 $-$ A_4 の電位

だから電位に関するキルヒホッフの法則により

$E_L + E_C + E_R = E$

したがって

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E \cdots (\star)$$

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[$(\star)$ の解法] $E = \sin \omega t$ としたときの $(\star)$ の一般解を求めよう。両辺 1 回微分して

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega \cos \omega t \tag{P}$$

として前回の方法を用いる。

2．2階線形常微分方程式

定数係数線形2階非斉次方程式：交流回路への応用

対応する斉次問題

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0 \tag{P_0}$$

の特性方程式は

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0.$$

ここで特性方程式の判別式 D が

$$D = \left(R^2 - \frac{4L}{C}\right) < 0$$

を仮定する．(これは解が時間的に振動するための条件である．) 特性解と基本解系は

$$\lambda = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{-D}i, \quad \left\{ e^{\frac{-R}{2L}t}\cos\sqrt{-D}t,\ e^{\frac{-R}{2L}t}\sin\sqrt{-D}t \right\}$$

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

(P) の一般解は

$$I(t) = I_0(t) + I_p(t),$$

である．ただし

$$I_0(t) = C_1 e^{\frac{-R}{2L}t} \cos\sqrt{-D}t + C_2 e^{\frac{-R}{2L}t} \sin\sqrt{-D}t, \quad ((P_0) \text{ の一般解})$$

$I_p(t)$ は (P) の特解

である．ここで

$$|I_0(t)| \leqq (|C_1| + |C_2|)e^{\frac{-R}{2L}t} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

により $I_0(t)$ は時間とともに急速に減衰してしまうので，応用上は $I_p(t)$ のみ調べれば十分な場合が多い．

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

(P) の特解を一つ求めよう。

$$L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I} = i\omega e^{i\omega t} \qquad (\tilde{P})$$

を解いて $I = \mathrm{Im}\tilde{I}$ とすればよい。なぜなら $(\tilde{P})$ の両辺の虚部をとると

$$\mathrm{Im}\left(L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I}\right) = \mathrm{Im}(i\omega e^{i\omega t})$$

$$L(\mathrm{Im}\tilde{I})'' + R(\mathrm{Im}\tilde{I})' + \frac{1}{C}(\mathrm{Im}\tilde{I}) = \omega\cos\omega t$$

となり $\mathrm{Im}\tilde{I}$ は (P) をみたすからである。

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$\tilde{I} = \dfrac{1}{Z} e^{i\omega t}$ とおいて $(\tilde{P})$ の解になるように複素定数 Z を求めると，

$$Z = iL\omega + R + \frac{1}{iC\omega} = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

となるが

$$Z = |Z| e^{i\theta}, \quad \text{ただし}\ |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}, \ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

だから

$$I = \mathrm{Im}\tilde{I} = \mathrm{Im}\frac{e^{i\omega t}}{Z} = \mathrm{Im}\frac{e^{i\omega t} e^{-i\theta}}{|Z|} = \frac{1}{|Z|}\mathrm{Im} e^{i(\omega t - \theta)} = \frac{1}{|Z|}\sin(\omega t - \theta)$$

これが (P) の解である。

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

$\tilde{I} = \dfrac{e^{i\omega t}}{Z}$ はオームの法則 $I = \dfrac{E}{R}$ に似ている.

異なる点は

その 1. 位相の遅れ $-\theta$ が生じること。

その 2. この「抵抗」にあたる量 Z (これをインピーダンスという) の絶対値

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

は ω によって変わり ω が $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ に一致するときもっとも小さくなること.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

以上のように Z と ω が分かると I を求めることができる。ここで Z は微分方程式を解かなくとも形式的な計算で求めることができる。

$$\text{コイルのインピーダンス} = iL\omega$$

$$\text{コンデンサのインピーダンス} = \frac{1}{iC\omega}$$

$$\text{抵抗器のインピーダンス} = R$$

としてこれらの総和を回路のインピーダンス Z とすればよいのである。これが交流回路理論で習ったこと。