

本日もやること

- 1 2. 2 階線形常微分方程式
 - 2.4 解析的な微分方程式と特殊関数
 - べき級数と解析関数
 - 解析的な解を持つ微分方程式
 - べき級数による微分方程式の解法
 - Bessel 関数

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

定数係数と変数係数の2階線形方程式

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = r(x),$$

→ 初等関数 (と右辺の積分) で解が書ける

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x),$$

→ 一般に解は初等関数でない

そこで初等関数を拡張して**解析関数**というものを考える。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

級数とその和の定義

$\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (*)$$

を級数 (または無限級数) という。極限

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

が存在するときべき級数 (*) は和 S に収束するという。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

[例：幾何級数 (等比級数)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \begin{cases} \infty & (r \geq 1, \text{ のとき}) \\ \frac{1}{1-r} & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (r \leq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

[確かめ] $r \neq 1$ のとき $1 + r + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$ であるが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r \geq 1, \text{ のとき}) \\ 0 & (|r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (r \leq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

べき級数の定義

x を変数, a を定数, $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (*2)$$

を, a を中心とする**べき級数**という. 極限

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$$

が存在するときべき級数 (*2) は収束するという. **べき級数の和 $f(x)$ は x の関数となる.**

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

べき級数の性質 (収束半径)

べき級数 (*2) に対して次の性質を満たす R ($0 \leq R < \infty$ または $R = \infty$) が存在する:

- (i) $|x - a| < R \Rightarrow$ (*2) は収束,
- (ii) $|x - a| > R \Rightarrow$ (*2) は発散

ただし

(*2) が全ての実数 x に対して収束するなら $R = \infty$,

(*2) が $x = a$ 以外の全ての x に対して発散するなら $R = 0$ とする.

R を (*2) の**収束半径**という.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

[例]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

は $-1 < x < 1$ のとき収束するから収束半径は 1.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の定義

関数 $f(x)$ がある点 a の近くで収束半径 (R とおく) が正のべき級数によって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \quad (*3)$$

のように表されるとき, $f(x)$ は **点 a で解析的である** という. 関数 $f(x)$ がその定義域 I の全ての点で解析的であるとき, $f(x)$ は **I で解析的である**, または **解析関数である** という.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (I). (項別微分可能性)

$f(x)$ が点 a で解析的であり、収束半径 $R > 0$ のべき級数によって (*3) のように表されるならば、 $f(x)$ は a の近くで微分可能であり導関数 $f'(x)$ は同じ収束半径のべき級数によって

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \quad (*4)$$

と表される。特に、解析関数はその定義域で何回でも微分可能である。

$$(*4) \text{ の第 } n \text{ 項} = \left((*3) \text{ の第 } n \text{ 項} \right)'$$

に注意。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (II). (Taylor 展開可能性)

解析関数はその定義域の全ての点で Taylor 展開可能である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

だから

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

でこれは Taylor 級数展開になっている.

要するに解析関数とは定義域の各点で Taylor 展開可能な関数のことである. 特に, 初等関数は全て解析的である.

解析的な微分方程式と特殊関数

解析的な解を持つ微分方程式

解析的な解を持つ微分方程式

$$(A) \quad \begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \end{cases}$$

ただし x を独立変数, $y = y(x)$ を未知関数とする。このとき

(Case 1) $P(x), Q(x), R(x)$ が a で解析的であるとき, a は (A) の**通常点**という。このとき任意の c_1, c_2 に対し a で解析的な (A) の解がただ一つある。

(Case 2) $R(x) \equiv 0$ とする。 $P(x), Q(x)$ が a で解析的でないとき, $(x - a)P(x), (x - a)^2Q(x)$ が a で解析的ならば, a は (A) の**確定特異点**であるという。このとき任意の c_1, c_2 に対し実数 $\lambda, r > 0$ があって

$$y = |x - a|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad (0 < |x - a| < r \text{ となる } x \text{ で収束})$$

の形の (A) の解がある。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

[例題 1.] $y'' + 3xy' + 6y = 0 \cdots \textcircled{1}$ は特異点を持たないからべき級数解

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \cdots \textcircled{2}$$

を持つ. $y(0) = 1, y'(0) = 0 \cdots \textcircled{3}$ のとき c_n を決定する.

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ へ代入して項別微分.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)'' + 3x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' + 6 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = 0$$

$$\text{第 1 項} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

$$\text{第 2 項} = 3x \left(\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} 3n c_n x^n$$

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

同次の項をまとめて

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + (3n+6)c_n) x^n = 0 \quad (x \text{ の恒等式})$$

だから

$$(n+1)c_{n+2} + 3c_n = 0, \quad (n = 0, 1, \dots) \dots \textcircled{4}$$

一方

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1 \text{ だから } \textcircled{3} \text{ より } c_0 = 1, c_1 = 0 \dots \textcircled{5}$$

④, ⑤ により

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0, \quad c_0 = 1, c_2 = -3, c_4 = 3, c_6 = -\frac{9}{5}, \dots$$

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

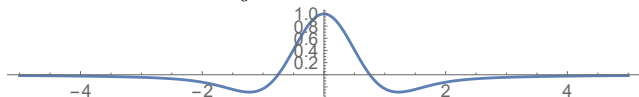
まとめて

$$y = 1 - 3x^2 + 3x^4 - \frac{9}{5}x^6 + \dots$$

④ から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+2}|}{|c_n|} = \infty$ であるが、これから収束半径 = ∞ 導かれることが分かっている。

Mathematica で計算すると

$$y = 1 - \sqrt{6}xe^{-\frac{3}{2}x^2} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}x}} e^{y^2} dy$$



解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

[例題 2.]

$$(6) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (\nu \geq 0 \text{ は定数})$$

を ν Bessel 方程式という.

$$(6) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0$$

であるが $x \times \frac{1}{x}$, $x^2 \times \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ は 0 で解析的だから前節の (Case 2) にあたる. だから

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad (a_0 \neq 0)$$

としてよい.

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

これを (6) に代入すると

$$\lambda^2 - \nu^2 = 0, \{(\lambda+1)^2 - \nu^2\}a_1 = 0, \{(\lambda+n)^2 - \nu^2\}a_n + a_{n-2} = 0, (n = 2, 3, \dots)$$

でなくてはならないことが分かるが、特に

$$\lambda = \nu, \quad a_0 = 2^{-\nu} \Gamma(\nu + 1)^{-1}$$

として一つの解

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m - \nu}$$

が得られる。これを ν 次の Bessel 関数という。ただし

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad : \text{Gamma 関数}$$