

3. 連立線形常微分方程式

[本日やること]

1. 定数係数連立線形常微分方程式の定義
2. ベクトル関数による表示
3. 線形代数を使った解法

3. 連立線型微分方程式

2 階以上の連立でない微分方程式 (これを単独方程式という) を 1 階連立微分方程式に書き直すことができる.

[例] $x(t), y(t)$: 未知関数とするとき, $x'(t) = y(t)$ とおくと

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 3 \quad \text{2 階単独}$$

⇕

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 3 \end{cases} \quad \text{1 階連立}$$

微分方程式を 1 階に直すことにより, (未知関数が増えるのではあるが) 理論的に見通しがよくなる.

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数とその導関数

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

のように成分が関数であるベクトルをベクトル関数という。各成分を微分してできるベクトル関数

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$

を $\mathbf{y}(t)$ の導関数という。これもベクトル関数となる。

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数の微分方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

とおくと (P) は

$$(P)' \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}$$

と書き表すことができる.

3. 連立線型微分方程式

追加!

初期値問題

$(P)'$ に初期条件 $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ を付け加えた問題

$$(IVP) \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

を **初期値問題** という.

3. 線形連立微分方程式

$(P)'$ で $f = \mathbf{0}$ としたもの (これを **斉次方程式** という)

$$(P_0) \quad \mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

について次のことが分かっている。

斉次方程式の解

[1]. (P_0) は n 個の (ベクトル関数として) 一次独立な解

$$\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$$

をもつ。これを **基本解** という。

[2]. (P_0) の **一般解** は

$$c_1\mathbf{y}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(t), \quad (c_1, \dots, c_n \text{ は任意定数})$$

である。

3. 線形連立微分方程式

ただし、 $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$ が **ベクトル関数として一次独立**であるというのは

$$c_1, \dots, c_n \text{ は定数で, } c_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(t) = \mathbf{0} \text{ は } t \text{ の恒等式}$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

となることである.

実は、ベクトル $\mathbf{y}_{01}, \dots, \mathbf{y}_{0n}$ に対する (IVP) の解を $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$ とするとき、

$\{\mathbf{y}_1(0), \dots, \mathbf{y}_n(0)\}$: ベクトルとして一次独立

\Updownarrow

$\{\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)\}$: ベクトル関数として一次独立

である。

3. 線形連立微分方程式

1. (P) の解については応用数学 A でやる予定。
2. 今回は A が n 個の独立な固有ベクトルを持つ場合に基本解系を求めておく。

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 A に対して

λ : A の固有値, x : λ に対する固有ベクトル
であるとは

$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ であること

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の対角化

n 次正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を持つならば,

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdots (*)$$

とおくと P は正則行列となり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (*2)$$

となる。ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は固有値となる。 $(*2)$ を A の対角化という。

3. 線形連立微分方程式

齊次方程式の解 (続き)

[3]. A が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を持つならば,

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{u}_n$$

は (P_0) の基本解となる。

[確かめ] (i) λ, \mathbf{u} が A の固有値, 固有ベクトルであるとき $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}$ は (P_0) の解となる。なぜなら

$$\mathbf{y}'(t) = (e^{\lambda t})' \mathbf{u} = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{y}$$

$$A\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} A\mathbf{u} = e^{\lambda t} (\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{y}$$

だから。

(ii) $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ が独立であることは $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ が独立であることからわかる。

3. 線形連立微分方程式

[例題] $x = x(t)$ を未知関数, ω を正の定数とする。

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

を1階連立方程式に直して一般解を求めよ。

(一階化) $y = x'$ とおくと (*) は

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases}$$

となるので

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと (*) は

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (*2)$$

となる。

3. 線形連立微分方程式

(固有値・固有ベクトル) A の固有値は固有方程式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

をとりて $\lambda = \pm i\omega$.

これらに対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$ (複合同順) とすると

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$$

を満たすから

$$\mathbf{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega \end{pmatrix}$$

3. 線形連立微分方程式

(基本解・一般解) したがって基本解は

$$\left\{ e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right\}$$

一般解は

$$\mathbf{y} = C_1 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \text{ は任意定数}$$

(初期条件を満たす解)

$$\mathbf{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. したがって

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} e^{i\omega t} \\ \operatorname{Re} (i\omega e^{i\omega t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$$