2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[本日やること]

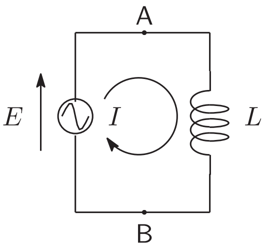
1. 電気回路 (LCR 回路) に交流起電力を加えたとき回路に流れる電流を, 微分方程式を解くことによって求める.

2. その強制振動部分の簡易解法を述べる.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[回路素子の働き 1. コイル]



I：電流　(図の向きを正として測る)

E：外部起電力　(図の向きを正として測る)

L：コイルのインダクタンス

E_L：コイルの両端の電位差
(＝ B の電位 − A の電位)

とすると自己誘導により

$$E_L = -L\frac{dI}{dt}$$

E_L ＝ A の電位 − B の電位

と定めて電圧降下とよぶことがある. このときは

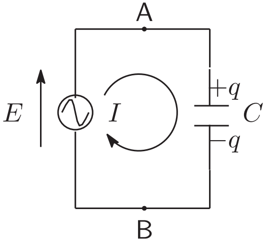
$$E_L = +L\frac{dI}{dt}$$

.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[回路素子の働き 2. コンデンサ]



C ： コンデンサの静電容量

q ： 極版の電荷　(電流の流れ込む側を正として測る)

E_C ： コンデンサの両端の電位差
(= B の電位 − A の電位)

とすると静電誘導により

$$E_C = -\frac{q}{C} = -\frac{1}{C}\int I\,dt$$

E_C = A の電位 − B の電位

と定めて**電圧降下**とよぶことがある. このときは

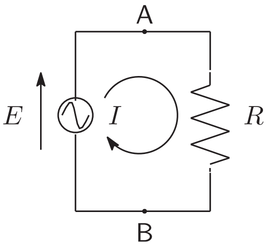
$$E_C = +\frac{1}{C}\int I\,dt$$

.

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[回路素子の働き 3．抵抗器]



R： 抵抗器の電気抵抗

E_R： 抵抗器の両端の電位差
(＝ B の電位 − A の電位)

とするとオームの法則により

$$E_R = -RI$$

$E_R =$ A の電位 − B の電位
と定めて電圧降下とよぶことがある．このときは

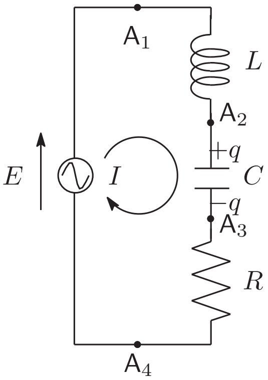
$$E_R = +RI$$

.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[LCR 回路の動作]



$E =$ A$_1$ の電位 − A$_4$ の電位

$E_L =$ A$_2$ の電位 − A$_1$ の電位

$E_C =$ A$_3$ の電位 − A$_2$ の電位

$E_R =$ A$_4$ の電位 − A$_3$ の電位

だから電位に関するキルヒホッフの法則により

$E_L + E_C + E_R + E = 0$

電圧降下の考え方を使うと

$E_L + E_C + E_R = E$

どちらの場合も

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E \cdots (\star)$$

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[$(\star)$ の解法] $E = \sin\omega t$ としたときの $(\star)$ の一般解を求めよう。両辺 1 回微分して

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega\cos\omega t \tag{P}$$

として前回の方法を用いる。

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

対応する斉次問題

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0 \tag{P_0}$$

の特性方程式は

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0.$$

ここで特性方程式の判別式 D が

$$D = \left(R^2 - \frac{4L}{C}\right) < 0$$

を仮定する．(これは解が時間的に振動するための条件である．) 特性解と基本解系は

$$\lambda = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{-D}i, \quad \left\{ e^{\frac{-R}{2L}t}\cos\sqrt{-D}t,\ e^{\frac{-R}{2L}t}\sin\sqrt{-D}t \right\}$$

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

(P) の一般解は

$$I(t) = I_0(t) + I_p(t),$$

である．ただし

$$I_0(t) = C_1 e^{\frac{-R}{2L}t} \cos\sqrt{-D}t + C_2 e^{\frac{-R}{2L}t} \sin\sqrt{-D}t, \quad ((P_0) \text{ の一般解})$$

$I_p(t)$ は (P) の特解

である．ここで

$$|I_0(t)| \leqq (|C_1| + |C_2|)e^{\frac{-R}{2L}t} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

により $I_0(t)$ は時間とともに急速に減衰してしまうので，応用上は $I_p(t)$ のみ調べれば十分な場合が多い．

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

(P) の特解を一つ求めよう。

$$L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I} = i\omega e^{i\omega t} \tag{$\tilde{P}$}$$

を解いて $I = \mathrm{Im}\tilde{I}$ とすればよい。なぜなら $(\tilde{P})$ の両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I}\right) &= \mathrm{Im}(i\omega e^{i\omega t}) \\
L(\mathrm{Im}\tilde{I})'' + R(\mathrm{Im}\tilde{I})' + \frac{1}{C}(\mathrm{Im}\tilde{I}) &= \omega\cos\omega t
\end{aligned}$$

となり $\mathrm{Im}\tilde{I}$ は (P) をみたすからである。

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$\tilde{I}=\frac{1}{Z}e^{i\omega t}$ とおいて $(\tilde{P})$ の解になるように複素定数 Z を求めると，

$$Z=iL\omega+R+\frac{1}{iC\omega}=R+i\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$$

となるが

$$Z=|Z|e^{i\theta},\quad \text{ただし } |Z|=\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{1}{R}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$$

だから

$$I=\mathrm{Im}\tilde{I}=\mathrm{Im}\frac{e^{i\omega t}}{Z}=\mathrm{Im}\frac{e^{i\omega t}e^{-i\theta}}{|Z|}=\frac{1}{|Z|}\mathrm{Im}e^{i(\omega t-\theta)}=\frac{1}{|Z|}\sin(\omega t-\theta)$$

これが (P) の解である。

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$\tilde{I} = \dfrac{e^{i\omega t}}{Z}$ はオームの法則 $I = \dfrac{E}{R}$ に似ている．

異なる点は

その 1．位相の遅れ $-\theta$ が生じること。

その 2．この「抵抗」にあたる量 Z (これをインピーダンスという) の絶対値

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

は ω によって変わり ω が $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ に一致するときもっとも小さくなること．

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

以上のように Z と ω が分かると I を求めることができる。ここで Z は微分方程式を解かなくとも形式的な計算で求めることができる。

$$\text{コイルのインピーダンス} = iL\omega$$

$$\text{コンデンサのインピーダンス} = \frac{1}{iC\omega}$$

$$\text{抵抗器のインピーダンス} = R$$

としてこれらの総和を回路のインピーダンス Z とすればよいのである。これが交流回路理論で習ったこと。