本日やること

1. 2. 2 階線形常微分方程式
    - 2.1 定数係数線形斉次方程式
    - 2.3 定数係数線形 2 階非斉次方程式

2. 2 階線形常微分方程式

復習

復習：定数係数線形 2 階斉次方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b : \text{実数の定数} \tag{2.1}$$

を**定数係数線型 2 階斉次常微分方程式**という.

復習：複素指数関数

複素数 $\lambda = p + iq$ (p, q は実数) に対して

$$e^{\lambda} = e^{p}(\cos q + i \sin q)$$

と定めると λ : 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} \tag{$\star$}$$

となる.

2. 2 階線形常微分方程式

復習

(2.1) の解法のアイデア：特性方程式・特性解

$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

だから

$$y = e^{\lambda x}\text{が (2.1) の解} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.2}$$

(2.2) を特性方程式といい、解 λ を特性解という。

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造)

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ．ただし D は特性方程式の判別式.

[1-1] $D > 0$ の場合． 特性解を $\lambda_1,\ \lambda_2$ (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$$

[1-2] $D = 0$ の場合． 特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x},\ x\, e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $D < 0$ の場合． 特性解を $\lambda_1 = A + iB,\ \lambda_2 = A - iB$ ($A,\ B$ は実数) とするとき

$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$ (複素数値解となる) または

$\{e^{Ax}\cos Bx,\ e^{Ax}\sin Bx\}$ (実数値解となる)

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造　続き)

[2]　$\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とするとき, (2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$

の形をしている．この他に解はない．

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式

$$y'' + ay' + by = r(x), \quad (r(x)\text{：必ずしも 0 でない既知関数}) \tag{2.12}$$

を定数係数線型 2 階非斉次常微分方程式という.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式の一般解

(2.12) の解のひとつを $y_p(x)$ とすると (2.12) の一般解は

$$y = y_p(x) + \text{(2.1) の一般解}$$

となる．この他に解はない．

$y_p(x)$ を特解という。

[確かめ] $y(x)$: (2.12) の任意の解， $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&Y''(x) + aY'(x) + bY(x) \\
&\quad = (y''(x) + ay'(x) + by(x)) - (y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)) \\
&\quad = r(x) - r(x) = 0
\end{aligned}$$

より $Y(x)$ は (2.1) の解であるので明らか．

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[未定計数法による特解の求め方]

[準備 1]

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_1(x) \text{ の解} \\ y_2(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_2(x) \text{ の解} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$\text{は } Y'' + aY' + bY = C_1 r_i(x) + C_2 r_2(x) \text{ の解}$$

[確かめ]

左辺

$$= (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + a(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' + b(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))$$

$$= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2)$$

$$= C_1 r_1 + C_2 r_2 = \text{右辺}$$

だから.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 2]　λ : 複素数の定数　とする。

$$y'' + ay' + by = ke^{\lambda x} \cdots (\star)$$

の特解として

(i) λ が特性解でないとき　$y_p(x) = A\,e^{\lambda x} \cdots (a)$

(ii) λ が特性解, 特性方程式の判別式 $D \neq 0$ のとき　$y_p(x) = Ax\,e^{\lambda x} \cdots (b)$

が とれる. ただし A は複素数の定数。

[確かめ] (i) のとき。$(\star)$ に (a) を代入

$$\begin{aligned}(\star) \text{ の左辺} &= (A\,e^{\lambda x})'' + a(A\,e^{\lambda x})' + b(A\,e^{\lambda x}) \\ &= A(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}\end{aligned}$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ から明らか.

2．2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

(ii) のとき (b) を代入すると

$$\begin{aligned}(\star)\ \text{の左辺} &= (Ax\,e^{\lambda x})'' + a(Ax\,e^{\lambda x})' + b(Ax\,e^{\lambda x}) \\ &= A\{(2\lambda + a)e^{\lambda x} + (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x}\}\end{aligned}$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $2\lambda + a = \sqrt{D} \neq 0$ から明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 3]
$y(x)$, $r(x)$: 複素数値関数, $Y(x) = \mathrm{Re}\, y(x)$, $Z(x) = \mathrm{Im}\, y(x)$ とする.

$$\begin{aligned} & y'' + ay' + by = r(x), \cdots (\star) \\ & \quad \Rightarrow \quad Y'' + aY' + bY = \mathrm{Re}\, r(x) \qquad Z'' + aZ' + bZ = \mathrm{Im}\, r(x) \end{aligned}$$

[確かめ] $y = Y + iZ$, $r(x) = \mathrm{Re}\, r(x) + i\mathrm{Im}\, r(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\star) \text{ の左辺} &= (Y + iZ)'' + a(Y + iZ)' + b(Y + iZ) \\ &= (Y'' + aY' + bY) + i\,(Z'' + aZ' + bZ) \\ (\star) \text{ の右辺} &= \mathrm{Re}\, r(x) + i\mathrm{Im}\, r(x) \end{aligned}$$

となるが, 実部虚部同士をそれぞれ比較せよ.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方

$k,\ k_1,\ k_2,\ \alpha,\ \beta$: 実数の定数 とするとき (2.12) の特解 $y_p(x)$ は次のようになるとしてよい.

1. $r(x) = k\,e^{\lambda x}$ の場合, (λ は複素数でもよい)
   1. λ は特性解でないならば $y_p(x) = Ae^{\lambda x}$.
   2. λ は特性解, $D = a^2 - 4b \neq 0$ ならば $y_p(x) = Axe^{\lambda x}$.
2. $r(x) = k\,\cos\beta x$ または $k\,\sin\,\beta x$ の場合,
   1. $\pm i\beta$ は特性解でないならば $y_p(x) = A\,\cos\,\beta x + B\,\sin\,\beta x$.
   2. $\pm i\beta$ は特性解であるならば $y_p(x) = A\,x\cos\,\beta x + B\,x\sin\,\beta x$.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方：続き

3. $r(x) = k\,e^{\alpha x}\cos\,\beta x$ または $k\,e^{\alpha x}\sin\,\beta x$ の場合,
   1. $\alpha \pm i\beta$ は特性解でないならば
      $y_p(x) = A\,e^{\alpha x}\cos\,\beta x + B\,e^{\alpha x}\sin\,\beta x.$
   2. $D \neq 0$ かつ $\alpha \pm i\beta$ は特性解であるならば
      $y_p(x) = A\,xe^{\alpha x}\cos\,\beta x + B\,xe^{\alpha x}\sin\,\beta x.$
4. $r(x) = n$ 次多項式の場合,
   1. $a \neq 0,\ b \neq 0$ ならば　$y_p = n$ 次多項式.
   2. $a \neq 0,\ b = 0$ ならば　$y_p = n+1$ 次多項式.
   3. $a = 0,\ b = 0$ ならば　$y_p = n+2$ 次多項式.

これらを (2.12) に代入してなりたつように未定係数 $A,\ B, \cdots$ を決めればよい.