

本日やること

- ① 1. 1 階常微分方程式
 - 1.5 非線形方程式
 - 変数分離型
 - 同次型
 - 補足・発展

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

変数分離型方程式

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad (f, g \text{ は既知関数.}) \quad (13)$$

の形の微分方程式を**変数分離型**微分方程式という.

これは, (積分さえ計算できれば) よく知られた関数の範囲で解を得ることができる.

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

[解法] (Step 1) $g(y_0) = 0$ を満たす定数 y_0 をさがす. もしあれば, 定数関数 $y(x) \equiv y_0$ は (13) の解となる.

(Step 2) $y(x) = y_0$ とならない解を求める. ((13) の解はある x で $y(x) \neq y_0$ ならばすべての x で $y(x) \neq y_0$ であることが分かっている.)

(Step 2-1) (13) の両辺を $g(y(x))$ で割る:

$$\frac{1}{g(y(x))} \frac{dy}{dx} = f(x).$$

(Step 2-2) 両辺を x で積分する:

$$\int \frac{1}{g(y(x))} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C.$$

(Step 2-3) 置換積分法をつかって左辺の積分変数を x から y に変換

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

この両辺の積分を計算したものが一般解である.

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

【例】 $y'(x) = y(x)(2 - y(x)) \cdots (a)$ の一般解を求めよ.

(a) は (13) で $f(x) = 1$, $g(y) = y(2 - y)$ としたものである. まず定数関数 $y \equiv 0$, $y \equiv 2$ は (a) の解である.

次に $y \neq 0, 2$ として両辺を $y(y - 2)$ で割ると

$$\frac{1}{y(y-2)} \frac{dy}{dx} = -1.$$

両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} \text{左辺の積分} &= \int \frac{1}{y(y-2)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{y(y-2)} dy \\ &= \int \left(\frac{1}{2(y-2)} - \frac{1}{2y} \right) dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y} \right| + C. \end{aligned}$$

1. 1 階常微分方程式

1.5 非線形方程式

$$\text{右辺の積分} = \int -1 dx = -x + C.$$

両辺比較して

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y} \right| = -x + C.$$

これを y について解くと

$$y = \frac{2Ce^{2x}}{Ce^{2x} - 1} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

これが一般解である. 定数解 $y = 0$ は一般解に含まれるが $y = 2$ は含まれない. このような解を 特異解という.

1. 1 階常微分方程式

1.6 補足・発展

変数変換によって変数分離型に帰着される微分方程式

同次型

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad (f \text{ は既知関数.})$$

[解法] $u = \frac{y}{x}$ により変数を y から u へ変換して u の方程式に直すと,
 $y' = (xu)' = u + xu'$ だから

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

のように変数分離型になる.

1. 1 階常微分方程式

補足・発展

[例] $y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \dots (a)$ の一般解を求める.

$f(u) = -\frac{1}{u}$ だから微分方程式は

$$u' = -\frac{1+u^2}{xu}$$

となり, 解は

$$u = \pm \frac{\sqrt{C-x^2}}{x} \quad \text{したがって} \quad x^2 + y^2 = C.$$

1. 1 階常微分方程式

補足・発展

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c) \quad (f \text{ は既知関数, } a, b, c \text{ は定数.})$$

[解法] $u = ax + by + c$ により変数を y から u へ変換して u の方程式に直すと、変数分離型になる。

[例] $y'(x) = \frac{1}{x + y(x)} \cdots (a)$ の一般解を求める。

$$u = x + y \quad u' = 1 + \frac{1}{u}$$

$$u - \log u = x + C \quad \text{したがって} \quad y - \log(x + y + 1) = C.$$