

# 本日よりこと

- ① 1. 1 階常微分方程式
  - 1.4 未定係数法

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

定理 1.6. (非斉次線型方程式の解の構造)

1 階線形微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = r(x). \quad (9)$$

の一般解は

$$y(x) = y_p(x) + C e^{-F(x)} \quad (*)$$

と表すことができる. ただし  $y_p(x)$  は (9) の任意の一つの解,  $F(x)$  は  $f(x)$  の原始関数,  $C$  は任意定数. したがって  $C e^{-F(x)}$  は斉次方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 \quad (12)$$

の一般解である.  $y_0(x)$  を **特解** ということがある. **特解をひとつ見つければすべての解がわかる** ことになる.

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

[確かめ]  $y(x)$  を (9) の解とすると,  $y_p(x)$  も (9) の解だから

$$\begin{aligned}y'(x) + f(x)y(x) &= r(x), \\y_p'(x) + f(x)y_p(x) &= r(x).\end{aligned}$$

両辺を引き算して

$$(y(x) - y_p(x))' + f(x)(y(x) - y_p(x)) = 0.$$

これは  $y(x) - y_p(x)$  が斉次方程式 (12) の解であることを表している. したがって定理 1.4 により

$$y(x) - y_p(x) = C e^{-F(x)}$$

がわかるがこれは (\*) を意味する。

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

### 定数係数 1 階線形微分方程式

$$y'(x) + ay(x) = r(x) \quad (a \text{ は定数}, r(x) \text{ は既知関数}) \quad (7)$$

の右辺  $r(x)$  が特別な関数である場合は、未定係数法により簡単に特解を求めることができる。

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

準備

$$(i) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

が  $x$  の恒等式

$$\iff n = m, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots$$

$$(ii) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \quad \text{が } x \text{ の恒等式}$$

$$\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

$$(iii) \quad a \sin kx + b \cos kx = 0 \quad \text{が } x \text{ の恒等式} \iff a = b = 0$$

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

未定係数法 (その 1)

$r(x) = (n \text{ 次多項式})$  のとき

$$y_p(x) = \begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots & (a \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots & (a = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおき (9) を満たすように未定係数  $a_0, a_1, \dots$  を決めればよい.

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

[例 1.10]  $y' + 3y = x^2 - 1 \cdots (a)$  の一般解を求めよ.

$y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  とおいて (a) の  $y$  に代入

$$\begin{aligned}(y_p)' + 3y_p &= (2\alpha x + \beta) + 3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= 3\alpha x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + \beta + 3\gamma = x^2 - 1.\end{aligned}$$

したがって  $3\alpha = 1$   $2\alpha + 3\beta = 0$   $\beta + 3\gamma = -1$  でなくてはならない.

これを解いて  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = -\frac{2}{9}$ ,  $\gamma = -\frac{7}{27}$  を得るから

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}.$$

一方,  $y' + 3y = 0 \cdots (b)$  の一般解は  $y = Ce^{-3x}$  だから a の一般解は

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27} + Ce^{-3x}.$$

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

未定係数法 (その 2)

$r(x) = \cos \omega x, \sin \omega x$  のとき

$$y_p(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$$

とおき係数  $\alpha, \beta$  を決めればよい.



# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

[例 1.12]  $y' + 2y = \cos x \cdots (a)$  の一般解を求めよ.

$y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x$  を (a) の  $y$  に代入すると

$$\begin{aligned}(y_p)' + 2y_p &= (-\alpha \sin x + \beta \cos x) + 2(\alpha \cos x + \beta \sin x) \\ &= (2\alpha + \beta) \cos x + (2\beta - \alpha) \sin x = \cos x.\end{aligned}$$

したがって

$$2\alpha + \beta = 1 \quad -\alpha + 2\beta = 0$$

でなくてはならない. これを解いて  $\alpha = \frac{2}{5}$ ,  $\beta = \frac{1}{5}$  を得るから

$$y_p = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

一方,  $y' + 2y = 0 \cdots (b)$  の一般解は  $y = Ce^{-2x}$  だから (a) の一般解は

$$y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + Ce^{-2x}.$$

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.4 未定係数法

未定係数法 (その 3)

$r(x) = ke^{qx}$  ( $q \neq -a$ ) のとき

$$y_p(x) = \alpha e^{qx}$$

とおき係数  $\alpha$  を決めればよい.

[例 1.13]  $y' - y = 2e^{2x} \dots (a)$  の一般解を求めよ.

$y_p = \alpha e^{2x}$  を (a) の  $y$  に代入すると

$$(y_p)' - y_p = (2\alpha - \alpha)e^{2x} = 2e^{2x}.$$

したがって  $\alpha = 2$  でなくてはならない.

一方,  $y' - y = 0 \dots (b)$  の一般解は  $y = Ce^x$  だから (a) の一般解は

$$y = 2e^{2x} + Ce^x.$$