本日やること

1. 1．1 階常微分方程式
   - 1.1 定数係数 1 階線形常微分方程式 (斉次型)

基本事項

1. 指数関数の微積分：

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C,$$ （ a ：定数）

2. 積分因子の性質： $F'(x) = f(x)$ のとき $F(x) = t$ とおくと合成関数の微分法により

$$(e^{F(x)})' = \frac{d}{dx}e^{F(x)} = \frac{dt}{dx}\,\frac{d}{dt}e^{t} = \frac{d}{dx}F(x)\,e^{t} = f(x)e^{F(x)}$$

3. 微分と積分の関係：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow\; f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

4. 積の微分法：

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

変数係数 1 階線型常微分方程式の定義

定義

$y(x)$：未知関数，　$f(x)$：定数でない既知関数，　$r(x)$：既知関数　とする．

$$y'(x) + f(x)y(x) = r(x). \tag{9}$$

を 変数係数 1 階線型常微分方程式 という．$r(x) \equiv 0$ のとき斉次型，$r(x) \neq 0$ のとき非斉次型という．これは 正規型 1 階方程式 において $f(x, y) = -f(x)y + r(x)$ としたものである．

変数係数 1 階線形常微分方程式

一般解

定理 1.4. 斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式の一般解

$f(x)$ を連続関数とする．斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0. \tag{12}$$

の一般解は

$$y(x) = C\,e^{-F(x)} \quad (C : \text{任意定数}) \tag{10}$$

であり他に解はない．ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数.

変数係数 1 階線形常微分方程式

一般解

定理 1.5. 非斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式の一般解

$f(x)$, $r(x)$ を連続関数とする．必ずしも斉次型でない (9) の一般解は

$$y(x) = \left(\int r(x)\, e^{F(x)}\, dx + C \right) e^{-F(x)} \quad (C：\text{任意定数}) \tag{11}$$

であり他に解はない．ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

ここに現れる $e^{F(x)}$ を (12) の積分因子という．

$f(x)$, $r(x)$ が連続ならば, (9) と (12) は定理 1.0 の条件を満たすから初期条件を決めるごとに解は一つだけ存在することが分かっている。

丸暗記しないこと。

変数係数 1 階線形常微分方程式

証明

[定理 1.5 の確かめ] (9) の両辺に積分因子 $e^{F(x)}$ をかけると

$$y'(x)e^{F(x)} + f(x)ye^{F(x)} = r(x)e^{F(x)}$$

であるが $\left(e^{F(x)}\right)' = f(x)e^{F(x)}$ と積の微分法により

$$\text{左辺} = y'(x)e^{F(x)} + y\left(e^{F(x)}\right)' = \left(y(x)e^{F(x)}\right)'$$

だから

$$\left(y(x)e^{F(x)}\right)' = r(x)e^{F(x)}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

証明続き

両辺積分して

$$y(x)e^{F(x)} = \int r(x)e^{F(x)}\,dx + C$$

両辺 $e^{F(x)}$ で割って

$$y(x) = \left(\int r(x)e^{F(x)}\,dx + C\right)e^{-F(x)}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

例題

[例 1.8.] 初期値問題 $\begin{cases} y'(x) + 2\,x\,y(x) = -x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ の解を求めよう．

y の係数は $2x$ であり $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$ (C は積分定数) だから積分因子は e^{x^2} とすればよい．これを両辺にかけると

$$e^{x^2} y'(x) + 2xe^{x^2} y(x) = -xe^{x^2}$$

となる．$\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ に注意して積の微分法を使うと

$$\text{左辺} = e^{x^2} y'(x) + \left(e^{x^2}\right)' y(x) = \left(e^{x^2} y(x)\right)'$$

となるから両辺を積分すると

$$e^{x^2} y(x) = \int (-x)e^{x^2}\,dx + C \quad C \text{ は積分定数}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

例題

となる．右辺の積分を $x^2 = t \cdots (\star)$ とおいて置換積分することにより求める。$(\star)$ を微分して $2x = \dfrac{dt}{dx}$, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ をかけて $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$ したがって

$$\int (-x)e^{x^2}\,dx = \int (-e^t)\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad C \text{ は積分定数}$$

となる．さらに両辺を e^{x^2} で割ると

$$y(x) = -\frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \quad C \text{ は任意定数}$$

が得られるが，これが一般解である．
$x = 1$ を代入すると初期条件 $y(1) = 0$ により $C = \dfrac{e}{2}$ がでてくるから，特殊解は

$$y(x) = \frac{e^{1-x^2} - 1}{2}.$$