問 No.13

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & ① \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 & ② \end{cases}$$ の級数解を求めよ

これは

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ③$$

の形の解がある。$\{a_n\}$を決定せよ。

③を①へ代入

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

項別微分 ||

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

mとおく.

$m=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \overset{(m+2)(m+1)}{n(n-1)}\, a_{\underset{m+2}{n}}\, x^{\overset{m}{n-2}}$$

||

再びmをnと書きなおす.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n \right\} x^n = 0 \quad (\text{恒等式})$$

一般に $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv 0$ (恒等式) $\Rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = 0$

だから

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad ④$$

としてよい。

$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad y' = a_1 + 2a_2 x + \cdots$

$y(0) = a_0 \qquad y'(0) = a_1$

これと②より $a_0 = 0,\ a_1 = 1,$

④より

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$$

④ $\Leftrightarrow \quad a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$

だから

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3 \times 2} = -\frac{1}{3 \times 2} = (-1)\frac{1}{3!}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \times 4} = (-1)^2 \frac{1}{5 \times 4} \frac{1}{3 \times 2} = (-1)^2 \frac{1}{5!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$$

以上から

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

じつはこれは $\sin x$ の Taylor 展開であるから

解は $y = \sin x$.