微分方程式 (電気) 演習問題 No.11 解答

問題 1

$I = \dfrac{1}{Z}e^{i\omega t} \cdots (\star)$ が

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = i\omega e^{i\omega t} \cdots (\star\star)$$

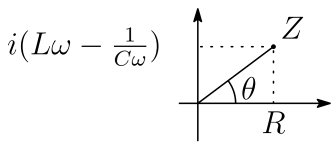
の解となるように複素定数 Z を決めよ。

$(\star)$ を $(\star\star)$ へ代入して

$$\begin{aligned}
&L\left(\frac{1}{Z}e^{i\omega t}\right)'' + R\left(\frac{1}{Z}e^{i\omega t}\right)' + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{Z}e^{i\omega t}\right) = i\omega\, e^{i\omega t} \\
&\frac{1}{Z}\left(L(i\omega)^2 e^{i\omega t} + R(i\omega)e^{i\omega t} + \frac{1}{C}e^{i\omega t}\right) = i\omega\, e^{i\omega t} \\
&\frac{1}{Z}\left(L(i\omega)^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right) = i\omega \\
&iL\omega + R + \frac{1}{iC\omega} = Z \\
&R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = Z
\end{aligned}$$

[余談] Z は

$$Z = |Z|e^{i\theta},\ \ ただし\ |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2},\ \ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$



だから

$$I = \frac{e^{i\omega t}}{Z} = \frac{e^{i\omega t}e^{-i\theta}}{|Z|} = \frac{e^{i(\omega t - \theta)}}{|Z|} = \frac{1}{|Z|}\left(\cos(\omega t - \theta) + i\sin(\omega t - \theta)\right)$$

である。ところで

$i\omega e^{i\omega t} = -\omega\sin(\omega t) + i\omega\cos(\omega t)$

だから $(\star\star)$ を実部虚部に分けると

$$\begin{aligned}
&L(\mathrm{Re}I)'' + R(\mathrm{Re}I)' + \frac{1}{C}(\mathrm{Re}I) = -\sin(\omega t) \\
&L(\mathrm{Im}I)'' + R(\mathrm{Im}I)' + \frac{1}{C}(\mathrm{Im}I) = \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

これにより

$$\mathrm{Re}I = \frac{1}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \quad \text{は} \quad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = -\omega\sin(\omega t) \quad \text{の解}$$

$$\mathrm{Im}I = \frac{1}{|Z|}\sin(\omega t - \theta) \quad \text{は} \quad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega\cos(\omega t) \quad \text{の解}$$

であることがわかる。さらに

$$I = \frac{e^{i\omega t}}{Z} \quad \text{は} \qquad LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = e^{i\omega t} \quad \text{の解}$$

$$\mathrm{Re}I = \frac{1}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \quad \text{は} \qquad LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = \cos(\omega t) \quad \text{の解}$$

$$\mathrm{Im}I = \frac{1}{|Z|}\sin(\omega t - \theta) \quad \text{は} \qquad LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = \sin(\omega t) \quad \text{の解}$$

と書けば見通しがよくなるでありましょう。