問3.

(*) $y'' - 6y' + 10y = f(x)$

(1) $f(x) \equiv 0$ のとき．斉次方程式となる．．

特性方程式 ： $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

特性解 ： $\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$.

特性解 ： $\{e^{3x}\cos x, e^{3x}\sin x\}$

一般解 ： $\boxed{y = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\sin x.}$

初期条件をみたすように C_1, C_2 をきめる．

$y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \underbrace{\sin 0}_{0} = \boxed{C_1 = 0}$ //.

$y' = \underbrace{C_1}_{0}(3e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x)$.

$+ C_2(3e^{3x}\sin x + e^{3x}\cos x)$. だから

$y'(0) = C_2 = 2$

だから $\boxed{y = 2e^{3x}\sin x}$

(2) $\ell > 0$,

$$\begin{cases} y'' + ky = 0 \\ y(0) = 0,\ y(\ell) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{境界条件}.$$

が定数でない解をもつ条件？

一般解は

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

$y(0) = C_1$, だから $C_1 = 0$.

$$y(\ell) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{C_1} \cos k\ell + C_2 \sin k\ell = 0$$

$C_2 \neq 0$ でなくてはならないから

$\sin k\ell = 0$.

$$\boxed{k\ell = n\pi,\quad n = 0, 1, 2, \cdots}$$

Wronski 行列式は

$$\begin{vmatrix} \cos kx, & \sin kx \\ -k\sin kx, & k\cos kx \end{vmatrix}$$

$$= k\cos^2 kx + k\sin^2 kx = k > 0.$$

参考. 関数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対して Wronski 行列式は

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} \right\}$$ x_0 をとめて、がベクトルとして線型独立

$$\Leftrightarrow \{ y_1(x), y_2(x) \}$$ が x の関数として線型独立

問5. $k>0$

(＊) $y'' + k^2 y = 0$

(1) $y = e^{\lambda x}$ が解になるとすると.

$$(e^{\lambda x})'' + k^2 e^{\lambda x} = 0$$

$$\overset{\|}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$(\lambda^2 + k^2)\, e^{\lambda x} = 0$$

だから $\lambda^2 + k^2 = 0$ ← 特性方程式という

となる。解は

$\lambda = \pm k i$ ← 特性解

基本解系 $\{e^{ikx},\ e^{-ikx}\}$

これは $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$ だから

$\{\cos kx,\ \sin kx\}$ としてもよい。

実数値の一般解は

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx,$$

C_1, C_2 : 任意の実数の定数.

(2) $f(x)=10x^2+28x-2$ とすると,

(*)の特解 y_p をひとつ求めたい。

$$y_p = Ax^2+Bx+C.$$

としてよい。A, B, C を求めよう.

y_p を (*) に代入.

$$\underbrace{(Ax^2+Bx+c)''}_{=2A} - 6\underbrace{(Ax^2+Bx+C)'}_{=2Ax+B} + 10(Ax^2+Bx+c)$$

$$= 10Ax^2+\boxed{(10B-12A)}x+2A-6B+10C$$

$$= \boxed{10}x^2+\boxed{28}x-2.$$

だから

$$\begin{cases} 10A=10 & A=1. \\ 10B-12A=28 & B=4. \\ 2A-6B+10C=-2 & C=2. \end{cases}$$

2 −24

$$y_p = x^2+4x+2$$

問4.

$$(*)\begin{cases} y'' + 4y' + by = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

b：定数

(1) $y = 2e^{-x} - 2e^{-3x}$ が解になるならば，(*)に代入して

$$(2e^{-x} - 2e^{-3x})'' + 4(2e^{-x} - 2e^{-3x})' + b(2e^{-x} - 2e^{-3x})$$

$$= (-6+2b)e^{-x} + (-18+24-2b)e^{-3x}$$

$= 0$　（xの恒等式）

すなわち $\begin{cases} -6+2b = 0 \\ 6-2b = 0 \end{cases}$ で $\underline{b=3}$

(2) $y = 4xe^{-2x}$ が解になるならば (*)に代入して

$$(4xe^{-2x})'' + 4(4xe^{-2x})' + b(4xe^{-2x})$$

$$= -16e^{-2x} + 16xe^{-2x} + 16e^{-2x} - 32xe^{-2x} + 4bxe^{-2x}$$

$= (-16+4b)xe^{-2x} = 0$ で $\underline{b=4}$

(3) 特性方程式： $\lambda^2+4\lambda+b=0$

特性解： $\lambda=-2\pm\sqrt{4-b}$

・ $b<4$ のとき 特性解は

$$\underset{\lambda_1 \text{ とおく}}{\underset{\parallel}{-2-\sqrt{4-b}}} < \underset{\lambda_2 \text{ とおく}}{\underset{\parallel}{-2+\sqrt{4-b}}}$$

基本解は $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ であるが，

$\lambda_1<0$ だから $e^{\lambda_1 x} \longrightarrow 0 \quad (x\to\infty)$。

$$e^{\lambda_2 x} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \lambda_2>0 \\ 1 & \lambda_2=0 \\ 0 & \lambda_2<0 \end{cases}$$

だから、$\lambda_2=0$ でなくては ならないから $\boxed{b=0}$.

・ $b>4$ とすると，特性解は

$$\lambda=-2\pm(\sqrt{b-4})i$$

基本解は

$$e^{-2x}\cos(\sqrt{b-4})x,\ e^{-2x}\sin(\sqrt{b-4})x$$

$|\cos|, |\sin|\leqq 1$ だから どちらも $x\to\infty$ のとき

$\longrightarrow 0$。

・ $b=4$ のとき，(2) の 場合となり

$$y=4xe^{-2x} \longrightarrow 0 \quad (x\to\infty)$$