2021

**問5** $k$ を正の定数とする．微分方程式

$$(*) \qquad y'' + k^2 y = 0$$

について考える．

(1) 微分方程式 $(*)$ の一般解

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

は $(f_1(x), f_2(x)) = \left(\boxed{\mathbf{50}}\right)$ で与えられる．このとき $f_1(x), f_2(x)$ のロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{51}}$$

である．

(2) $\ell$ を正の定数とする．微分方程式 $(*)$ が，$y(0) = 0, y(\ell) = 0$ を満たし，定数関数ではない解をもつための必要十分条件は，$k\ell = \boxed{\mathbf{52}}$ である．

**問3** 微分方程式 2020

$$(*) \qquad y'' - 6y' + 10y = f(x)$$

を考える．

(1) $f(x) = 0$ のとき，$(*)$ の一般解は $y(x) = \boxed{\mathbf{41}}$ である．さらに初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解は $y(x) = \boxed{\mathbf{42}}$ である．

(2) $f(x) = 10x^2 + 28x - 2$ のとき，定数 $A, B, C$ を $A = \boxed{\mathbf{43}}$，$B = \boxed{\mathbf{44}}$，$C = \boxed{\mathbf{45}}$ と定めると

$$y(x) = \boxed{\mathbf{41}} + Ax^2 + Bx + C$$

は，$(*)$ の一般解になる．

**問4** 初期値問題 2020

$$y'' + 4y' + by = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

の解 $y$ について考える．ただし，$b$ は定数である．

(1) $b = \boxed{\mathbf{46}}$ のとき，$y = 2e^{-x} - 2e^{-3x}$ である．

(2) $b = \boxed{\mathbf{47}}$ のとき，$y = 4xe^{-2x}$ である．

(3) $b = \boxed{\mathbf{48}}$ のとき，$\lim_{x \to \infty} y(x) = 1$ である．