微分方程式(電気)　演習問題 No.9　2020. 7. 14	学生番号	氏名		

以下 x を独立変数 y を未知関数とする．

問題 1　$y'' - 4y' + 5y = 0 \cdots (\star)$ を解きたい。

(1) 解が $y = e^{\lambda x}$ の形をしているとして、本当に解になるように λ の値を決めよ。

$y = e^{\lambda x}$ を $\star$ に代入すると

$$(e^{\lambda x})'' - 4(e^{\lambda x})' + 5(e^{\lambda x}) = 0$$

$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}, (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ だから

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ だから

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

これをみたす λ は 2次方程式の解の公式から

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

$\lambda = 2+i, 2-i$

(2) $(\star)$ の基本解系で i を含まないものを一つ作れ。

$(\star)$ の基本解系として

$$\{e^{(2+i)x}, e^{(2-i)x}\}$$

がとれるが

$$\begin{cases} e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x) \cdots ① \\ e^{(2-i)x} = e^{2x}(\cos x - i\sin x) \cdots ② \end{cases}$$

だから 重ねあわせの原理により

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(① + ②) = e^{2x}\cos x \\ \frac{1}{2i}(① - ②) = e^{2x}\sin x \end{cases}$$

も解であり, しかも 1次独立である.

$$\{e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x\}$$

も基本解系であり, i を含まない.

(3) $(\star)$ の実数値であるすべての解を求めよ。

一般解は (2)で求めた基本解を用いて

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$$

(C_1, C_2 は任意の実数の定数)

これ以外に解はない.

(4) $(\star)$ の初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ。

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$$

かつ初期条件をみたすように．C_1, C_2 を決める。

$$y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1 = 1$$

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x}\cos x - C_1 e^{2x}\sin x + 2C_2 e^{2x}\sin x + C_2 e^{2x}\cos x$$

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 0$$

だから $C_2 = -2$.

以上から

$$y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$$ //