No 6.

(1) $y' - 2y = 4x$ … (※)

$y_p = \alpha x + \beta$ としてよい。(α, β：未定係数)
(※)へ代入し，(※)が成り立つように α, β を決める。

$$(\alpha x + \beta)' - \underbrace{2(\alpha x + \beta)}_{2\alpha x + 2\beta}$$

$$= \boxed{-2\alpha} x + \boxed{\alpha - 2\beta} = \boxed{4} x + \boxed{0}$$

だから $\begin{cases} -2\alpha = 4, \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2. \\ \beta = -1. \end{cases}$

であればよい。

$y_p = \boxed{-2x - 1}$

一方，

$y' - 2y = 0$ … (※※)

の一般解は $y = \boxed{Ce^{2x}}$.

だから
(※)の一般解は.

$$y = \boxed{-2x-1} + \boxed{Ce^{2x}}$$

(2) $y' - 2y = 5\sin x$ ⋯ (※)

$y_p = \alpha \sin x + \beta \cos x$　としてよい。

(※) へ代入.

$$\underbrace{(\alpha \sin x + \beta \cos x)'}_{\alpha \cos x - \beta \sin x} - 2(\alpha \sin x + \beta \cos x)$$

$$= \boxed{(\alpha - 2\beta)} \cos x + \boxed{(-2\alpha - \beta)} \sin x$$

$$= \boxed{0} \times \cos x \quad \boxed{5} \sin x$$

だから $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha - \beta = 5 \end{cases}$　$\alpha = -2$, $\beta = +1$

であれば (※) がなりたつ. だから

$$y_p = \boxed{-2\sin x - \cos x}$$

一方, $y' - 2y = 0$ ⋯(※※) の一般解は $y = \boxed{Ce^{2x}}$

だから

(※) の一般解は

$$y = \boxed{-2\sin x - \cos x} + \boxed{Ce^{2x}}$$

(3) $y' - 2y = e^x$ ---(＊)

$y_p = \alpha e^x$ としてよい。

(＊)へ代入。

$$(\alpha e^x)' - 2(\alpha e^x) = \alpha e^x - 2\alpha e^x = -\alpha e^x$$

$$= e^x$$

したがって $-\alpha = 1$, $\underline{\alpha = -1}$ だから

$y_p = \boxed{-e^x}$ //

一方 $y' - 2y = 0$ の一般解は $\boxed{Ce^{2x}}$.

だから、(＊)の一般解は

$y = \boxed{-e^x} + \boxed{Ce^{2x}}$ //

(4). $y' - 2y = e^{2x}$ --- (☆)

$y' - 2y = 0 \iff y = Ce^{2x}$ だから

$y_p = \alpha e^{2x}$ とすると うまくいかない。

$y_p = \alpha x e^{2x}$ とすると、(☆)に代入して

$$\underbrace{\underbrace{(\alpha x e^{2x})'}_{\alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x}} - 2(\alpha x e^{2x})}_{= \alpha e^{2x}} = e^{2x}$$

だから $\alpha = 1$, $y_p = xe^{2x}$.

したがって一般解は

$$y = xe^{2x} + Ce^{2x}$$ //