No 4.

(1) $\underbrace{y' - (\sin x)}_{f(x)} y = 0$ の一般解.

原始関数 $F(x) = \int(-\sin x)dx = \cos x \ (+C)$

だから積分因子は

$$e^{F(x)} = \boxed{e^{\cos x}} \rightarrow \boxed{(e^{\cos x})'} = \boxed{-\sin x\, e^{\cos x}}$$

これを両辺にかけて.

$$y'\boxed{e^{\cos x}} \underbrace{- \sin x \boxed{e^{\cos x}}}_{(e^{\cos x})'} y = 0$$

積の微分法により

$$\text{左辺} = (y e^{\cos x})' = 0$$

両辺積分

$$y e^{\cos x} = \int 0 dx = C$$

両辺 $\div e^{\cos x}$

$$y = C e^{-\cos x} \quad , \ (C: \text{任意定数})$$

(2) $y' - (\sin x) y = \sin x$

積分因子 $\boxed{e^{\cos x}}$ をかける。

$$y' \boxed{e^{\cos x}} \boxed{- \sin x \boxed{e^{\cos x}}} y = \sin x \boxed{e^{\cos x}}$$

$\boxed{\left(e^{\cos x}\right)' = - \sin x \left(e^{\cos x}\right)}$ を利用して。

$$\underbrace{y' e^{\cos x} + \left(e^{\cos x}\right)' y}_{= \left(y e^{\cos x}\right)'} = \sin x \, e^{\cos x}$$

積の微分に。

両辺積分

$$y \cdot e^{\cos x} = \int \sin x \, e^{\cos x} dx$$

右辺は $\cos x = t$ とおいて置換積分。

$$\cos x = t \xrightarrow{\text{微分}} -\sin x = \frac{dt}{dx}$$

$$\xrightarrow{-dx\text{かける}} \boxed{\sin x \, dx = -dt}$$

$$= \int e^t (-dt) = -e^t = -e^{\cos x} + C.$$

だから

$$y e^{\cos x} = -e^{\cos x} + C.$$

$$y = -1 + C e^{-\cos x}$$ (C:任意定数)

(3) 初期条件 $y(0)=0$ をみたす解をつくる。

$$y=-1+Ce^{-\cos x}$$

で $x=0$ を代入すると

$$y(0)=-1+Ce^{-1}$$

$\parallel$ ← 初期条件より

0

これをみたすように C をきめる。

より

$$C=e$$

だから

$$y=-1+ee^{-\cos x}=-1+e^{1-\cos x}$$ //

これが初期条件 $y(0)=0$ をみたす解。