微分方程式　No. 2

問1 (1)

$y = e^{kx}$ …① は　(k: 定数)

$y' = ky$ …② の解であることをたしかめる。

①を微分すると、

$$y' = (e^{kx})' = ke^{kx}$$

ところで①より $e^{kx} = y$ だから、

$$y' = ky$$

で②がみたされる。

(2)

$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$ …① は、

$y'' + k^2 y = 0$ …② の解であることをたしかめる。

①を微分して、

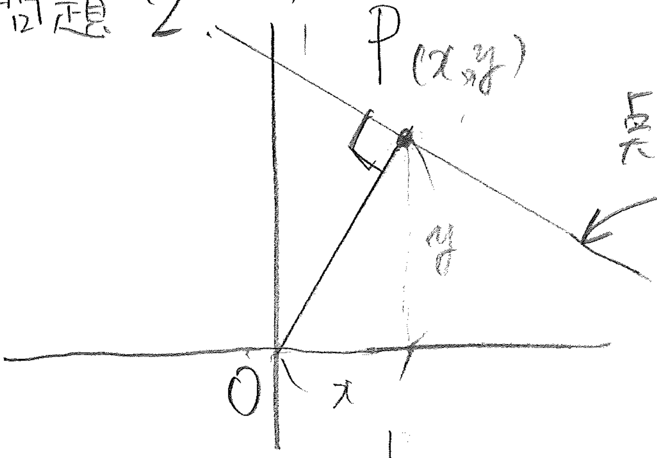
$$y' = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx$$

$$y'' = -C_1 k^2 \cos kx - C_2 k^2 \sin kx$$

①より　$y'' = -k^2 y$

したがって②がみたされる。

問題2 (1)

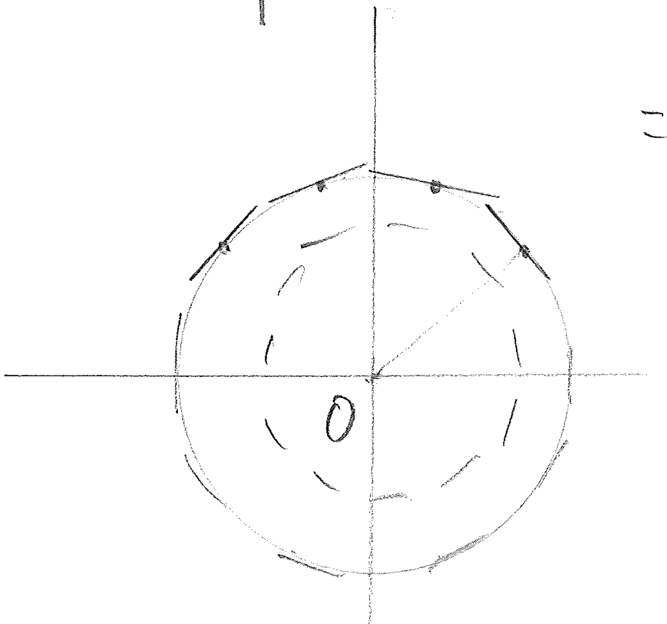


$y' = -\frac{x}{y}$ の方向場は、

点Pで傾き$=-\frac{x}{y}$の短い線分をひいたもの。

だから方向場は、OPと垂直な方向

これをすべての点Pでおこなうと、同心円に接する方向



したがって解曲線は、原点中心の同心円。

(2) $y=\sqrt{4-x^2}$ ---② が $y'=-\frac{x}{y}$ ---① の解であることをたしかめる。

②を微分して

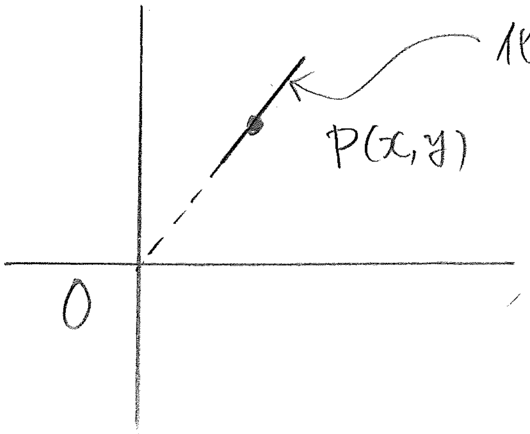
$4-x^2=t$ とおいて合成関数の微分法をつかう。

$$y'=\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{d}{dt}\sqrt{t}\times\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\times(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{t}} = \frac{-x}{y}.$$

したがって①がみたされる。

(3) $y' = \dfrac{y}{x}$ の方向場をかく。



各点Pで OPと同じ方向に線分を引けばよい。

(4) $y = 2x$ が解であること。

$y' = 2$.

一方 直線 $y = 2x$ 上各点で $\dfrac{y}{x} = 2$ だから $y' = \dfrac{y}{x}$。