微分方程式(電気) 演習問題 No.1 解答

問題 1 (1) $y = 2x^2 + C$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'(x) = 4x$ の解であることを確かめよ.

$y' = 4x \cdots$ ① $\quad y = 2x^2 + C \cdots$ ② とする.

②の両辺を微分すると C は定数だから

$y' = (2x^2 + C)' = 4x + (C)' = 4x$

これは①だから, ②は①の解である.

(2) $y = Ce^{4t}$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'(t) = 4y(t)$ の解であることを確かめよ.

$y' = 4y \cdots$ ① $\quad y = Ce^{4t} \cdots$ ② とする.

②の両辺を微分すると C は定数だから

$y' = (Ce^{4t})' = C(e^{4t})'$.

ここで $4t = s$ とおき, 合成関数の微分法を使うと

$(e^{4t})' = \dfrac{d}{dt}e^{4t} = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d}{ds}e^s = 4e^s = 4e^{4t}$

だから $y' = 4Ce^{4t}$.

ここで ② により右辺は $= 4y$ だから

$y' = 4y$.

これは,①だから,②は①の解である.

問題 2

(1) $y = \dfrac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \cdots$ ② (C_1, C_2 は定数であるが値はなんでもよい) は常微分方程式 $y'' = g \cdots$ ① の解であることを確かめよ.

② を繰り返し微分すると

$y' = gt + C_1$,

$y'' = g$.

で ① となるから ② は ① の解である.

(2) 真空中で金属球を自由落下させたとき、10 秒後までに落ちる距離とそのときの速度を求めよ。$y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

であるが $y(0) = 0, v(0) = 0$ だから $C_1 = C_2 = 0$ となるので

$y = \frac{1}{2}gt^2$.

だから

$v(t) = y'(t) = gt.$

10 秒後の速度は $v(10) = 9.8 \times 10 = 98[m/s] = 352[km/h]$。 新幹線並みである。

10秒後の落下距離は $y(10) = 490[m]$. ちなみにスカイツリーの高さは643[m]。あそこでものを落としてはいけません。

(3) $y = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right)$ は 常微分方程式 $my'' + ky' = mg$ の解であることを確かめよ.

$my'' + ky' = mg \cdots ①$
$y = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right) \cdots ②$
とする. ②を微分すると

$$y' = \frac{mg}{k}\left(1 + \frac{m}{k}\left(-\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} - 0\right)\right) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{m}{k}t}\right),$$
$$y'' = \frac{mg}{k}\left(0 - \left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{m}{k}t}\right) = g\,e^{-\frac{m}{k}t}.$$

これらを ① へ代入すると

①の左辺 $= m\left(ge^{-\frac{k}{m}}t\right) + k\left(\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{m}{k}t}\right)\right) = mg =$①の右辺.

だから①が成り立つ. だから ② は ① の解である.

問題 3 k, l を定数とするとき $y = \frac{k}{Ce^{-kt} + l} \cdots ②$ (C は定数であるが値はなんでもよい) は 常微分方程式 $y'(t) = (k - ly(t))y(t) \cdots ①$ の解であることを確かめよ.

② を微分すると

$$y' = \frac{(k)'Ce^{-kt} + l - k(Ce^{-kt} + l)'}{(Ce^{-kt} + l)^2} = \frac{+k^2\,Ce^{-kt}}{(Ce^{-kt} + l)^2}.$$

一方 ① の右辺に ② を代入すると

$$①の右辺 = \left(k - \frac{kl}{Ce^{-kt} + l}\right)\frac{k}{Ce^{-kt} + l} = k(Ce^{-kt} + l - l)\frac{k}{(Ce^{-kt} + l)^2}$$
$$= \frac{k^2Ce^{-kt}}{(Ce^{-kt} + l)^2}$$

だから ① が成り立つ. だから ② は ① の解である.