本日やること

1. 2. 2 階線形常微分方程式
   - 2.4 解析的な微分方程式と特殊関数
     - べき級数と解析関数
     - 解析的な解を持つ微分方程式
2. べき級数による微分方程式の解法
     - Bessel 関数

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

級数とその和の定義

$\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{$\star$}$$

を級数 (または無限級数) という．極限

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

が存在するときべき級数 $(\star)$ は和 S に収束するという．

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

[例：幾何級数 (等比級数)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \begin{cases} \infty & (r \geqq 1,\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{1-r} & (|r| < 1\ \text{のとき}) \\ \text{発散} & (r \leqq -1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

[確かめ] $r \neq 1$ のとき $1 + r + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ であるが

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r \geqq 1,\ \text{のとき}) \\ 0 & (|r| < 1\ \text{のとき}) \\ \text{発散} & (r \leqq -1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

だから。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

べき級数の定義

x を変数, a を定数, $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を実数の数列とするとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (\star 2)$$

を, a を中心とするべき級数という. 極限

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

が存在するときべき級数 $(\star 2)$ は収束するという. べき級数の和 $f(x)$ は x の関数となる.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

べき級数の性質 (収束半径)

べき級数 $(\star 2)$ に対して次の性質を満たす R $(0 \leqq R < \infty$ または $R = \infty)$ が存在する：

(i) $|x-a| < R \quad \Rightarrow \quad (\star 2)$ は収束,

(ii) $|x-a| > R \quad \Rightarrow \quad (\star 2)$ は発散

ただし

$(\star 2)$ が全ての実数 x に対して収束するなら $R = \infty$,

$(\star 2)$ が $x = a$ 以外の全ての x に対して発散するなら $R = 0$ とする.

R を $(\star 2)$ の収束半径という.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

[例]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

は $-1 < x < 1$ のとき収束するから収束半径は 1.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の定義

関数 $f(x)$ がある点 a の近くで収束半径 (R とおく) が正のべき級数によって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \qquad (\star 3)$$

のように表されるとき, $f(x)$ は点 a で解析的であるという. 関数 $f(x)$ がその定義域の全ての点で解析的であるとき, $f(x)$ は単に解析的である, または解析関数であるという.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (I). (項別微分)

$f(x)$ が点 a で解析的であり, 収束半径 $R > 0$ のべき級数によって $(\star 3)$ のように表されるならば, $f(x)$ は a の近くで微分可能であり導関数 $f'(x)$ は同じ収束半径のべき級数によって

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-a)^{n-1}, \quad a - R < x < a + R \text{ で収束} \qquad (\star 4)$$

と表される. 特に, 解析関数はその定義域で何回でも微分可能である.

$$(\star 4) \text{ の第 } n \text{ 項} = \Big((\star 3) \text{ の第 } n \text{ 項} \Big)'$$

に注意。

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数と解析関数

解析関数の性質 (II). (Taylor 展開)

解析関数はその定義域の全ての点で Taylor 展開可能である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ \Rightarrow\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

だから

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

でこれは Taylor 級数展開になっている.

要するに解析関数とは定義域の各点で Taylor 展開可能な関数のことである. 特に, 初等関数は全て解析的である.

解析的な微分方程式と特殊関数

解析的な解を持つ微分方程式

解析的な解を持つ微分方程式

$$(A) \quad \begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \end{cases}$$

ただし x を独立変数, $y = y(x)$ を未知関数とする。このとき
(Case 1) $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が a で解析的であるとき, a は (A) の通常点という. このとき任意の c_1, c_2 に対し a で解析的な (A) の解がただ一つある.
(Case 2) $R(x) \equiv 0$ とする. $P(x)$, $Q(x)$ が a で解析的でないとき, $(x-a)P(x)$, $(x-a)^2Q(x)$ が a で解析的ならば, a は (A) の確定特異点であるという. このとき任意の c_1, c_2 に対し実数 λ, $r > 0$ があって

$$y = |x-a|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (0 < |x-a| < r \text{ となる } x \text{ で収束})$$

の形の (A) の解がある.

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

[例題]　微分方程式 $y'' + 3xy' + 6y = 0 \cdots ①$ は特異点を持たないからべき級数解 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \cdots ②$ を持つ．$y(0) = 1, y'(0) = 0 \cdots ③$ のとき c_n を決定せよ．

[例題の解]

② を ① へ代入

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'' + \underbrace{3x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'} + 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

$$3x\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = 3x\left(\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 3n c_n x^n$$

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

だから．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)C_{n+2}+(3n+6)C_n\right\}x^n=0$$

$n=0,1,2,\cdots$ について．

$$(n+2)(n+1)C_{n+2}+3(n+2)C_n=0$$

$$C_{n+2}=-\frac{3}{n+1}C_n,\quad n=0,1,2,\cdots \quad ④$$

$y(0)=C_0$, $y'(0)=C_1$ だから． $C_0=1$, $C_1=0$. $\cdots$ ⑤

④，⑤ より

$$C_1=C_3=C_5=\cdots=0.$$

解析的な微分方程式と特殊関数

べき級数による微分方程式の解法

$C_0=1,\ C_2=-3,\ C_4=3,\ C_6=-\frac{9}{5},\ \cdots\cdots$

だから

$$y=1-3x^2+3x^4-\frac{9}{5}x^6+\cdots\cdots$$

が分る。 ④より

収束半径 $=\infty$

と分る。

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

(6) $$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (\nu \geqq 0 \text{ は定数})$$

を **ν Bessel 方程式**という.

$$(6) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0$$

であるが $x \times \frac{1}{x}$, $x^2 \times \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ は 0 で解析的だから前節の (Case 2) にあたる. だから

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\lambda} \quad (a_0 \neq 0)$$

としてよい.

解析的な微分方程式と特殊関数

Bessel 関数

これを (6) に代入すると

$$\lambda^2-\nu^2=0,\ \{(\lambda+1)^2-\nu^2\}a_1=0,\ \{(\lambda+n)^2-\nu^2\}a_n+a_{n-2}=0,\ (n=2,3,\cdots)$$

でなくてはならないことが分かるが, 特に

$$\lambda=\nu,\quad a_0=2^{-\nu}\Gamma(\nu+1)^{-1}$$

として一つの解

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

が得られる. これを ν 次の Bessel 関数という. ただし

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad : \text{Gamma 関数}$$