3. 連立線形常微分方程式

[本日やること]

1. 定数係数連立線形常微分方程式の定義
2. ベクトル関数による表示
3. 線形代数を使った解法

3. 連立線型微分方程式

独立変数を t とする.

定数係数連立一階線形常微分方程式の定義

$$(P) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \qquad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases}$$

を, 定数係数連立一階線形常微分方程式 という. ただし

$y_j = y_j(t)$: t の未知関数, $f_j = f_j(t)$: t の既知関数, $(j = 1, \cdots, n)$

a_{ij} : 実数の定数 $(i, j = 1, \cdots, n)$

3. 連立線型微分方程式

2 階以上の連立でない微分方程式 (これを単独方程式という) を 1 階連立微分方程式に書き直すことができる.

[例] $x(t)$, $y(t)$: 未知関数とするとき, $x'(t) = y(t)$ とおくと

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 3 \qquad \text{2 階単独}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 3\,x(t) + 2\,y(t) + 3 \end{cases} \qquad \text{1 階連立}$$

微分方程式を 1 階に直すことにより, (未知関数が増えるのではあるが) 理論的に見通しがよくなる.

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数とその導関数

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

のように成分が関数であるベクトルをベクトル関数という。各成分を微分してできるベクトル関数

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{y}(t)$ の導関数という。これもベクトル関数となる。

3. 連立線型微分方程式

ベクトル関数の微分方程式

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

とおくと (P) は

$$(P)' \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$$

と書き表すことができる.

3. 線形連立微分方程式

$(P)'$ で $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ としたもの（これを斉次方程式という）

$$(P_0) \qquad \boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

について次のことが分かっている。

斉次方程式の解

[1]. (P_0) は n 個の (ベクトル関数として) 一次独立な解

$$\boldsymbol{y}_1(t),\cdots,\boldsymbol{y}_n(t)$$

をもつ．これを 基本解 という．

[2]. (P_0) の 一般解 は

$$c_1\boldsymbol{y}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{y}_n(t), \quad (c_1,\cdots,c_n \text{ は任意定数})$$

である．

3. 線形連立微分方程式

ただし, $\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)$ が ベクトル関数として一次独立であるというのは

$$c_1, \cdots, c_n \text{ は定数で, } c_1\boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(t) = \mathbf{0} \text{ は } t \text{ の恒等式}$$
$$\Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

となることである.
実は,

$$\{\boldsymbol{y}_1(0), \cdots, \boldsymbol{y}_n(0)\} : \text{ベクトルとして一次独立}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\boldsymbol{y}_1(t), \cdots, \boldsymbol{y}_n(t)\} : \text{ベクトル関数として一次独立}$$

である。

3. 線形連立微分方程式

1. (P) の解については応用数学 A でやる予定。
2. 今回は $\boldsymbol{A}$ が n 個の独立な固有ベクトルを持つ場合に基本解系を求めておく。

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

λ ：$\boldsymbol{A}$ の固有値,　$\boldsymbol{x}$ ：λ に対する固有ベクトル

であるとは

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であること

3. 線形連立微分方程式

復習：行列の対角化

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つならば，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

とおくと $\boldsymbol{P}$ は正則行列となり

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\star 2)$$

となる。ここで $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は固有値となる。$(\star 2)$ を $\boldsymbol{A}$ の対角化という。

3. 線形連立微分方程式

斉次方程式の解 (続き)

[3]. $\boldsymbol{A}$ が n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を持つならば,

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{u}_n$$

は (P_0) の基本解となる。

[確かめ] (i) λ, $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有値, 固有ベクトルであるとき $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{u}$ は (P_0) の解となる。なぜなら

$$\boldsymbol{y}'(t) = \left(e^{\lambda t}\right)'\boldsymbol{u} = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = e^{\lambda t}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{y}$$

だから。
(ii) $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots \boldsymbol{y}_n\}$ が独立であることは $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n\}$ が独立であることからわかる。

3. 線形連立微分方程式

[例題] $x = x(t)$ を未知関数, ω を正の定数とする。

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

を 1 階連立方程式に直して一般解を求めよ。

(一階化) $y = x'$ とおくと $(\star)$ は

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases}$$

となるので

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\star)$ は

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{$\star 2$}$$

となる。

3. 線形連立微分方程式

(固有値・固有ベクトル) $\boldsymbol{A}$ の固有値は固有方程式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

をといて $\lambda = \pm i\omega$.

これらに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_\pm = \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$ (複合同順) とすると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix} = \pm i\omega \begin{pmatrix} u_{1,\pm} \\ u_{2,\pm} \end{pmatrix}$$

を満たすから

$$\boldsymbol{u}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega \end{pmatrix}$$

3. 線形連立微分方程式

(基本解・一般解) したがって基本解は

$$\left\{ e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right\}$$

一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}$$

(初期条件を満たす解)

$$\boldsymbol{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$. したがって

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, e^{i\omega t} \\ \mathrm{Re}\left(i\omega e^{i\omega t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega \sin\omega \end{pmatrix}$$