2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用（再説）

[本日やること]

1．電気回路に交流起電力を加えたとき回路に流れる電流を, 微分方程式を解くことによって求める.

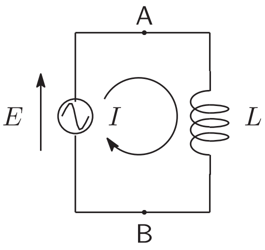
2．その強制振動部分の簡易解法を述べる.

不徹底な部分があったのでやり直します。

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用（再説）

[回路素子の働き 1. コイル]



I： 電流 (図の向きを正として測る)

E： 外部起電力 (図の向きを正として測る)

L： コイルのインダクタンス

E_L： コイルの両端の電位差
(= B の電位 − A の電位)

とすると自己誘導により

$$E_L = -L\frac{dI}{dt}$$

E_L = A の電位 − B の電位

と定めて電圧降下とよぶことがある. このときは

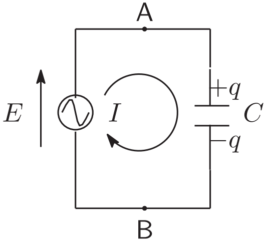
.

$$E_L = +L\frac{dI}{dt}$$

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用（再説）

[回路素子の働き 2．コンデンサ]



C： コンデンサの静電容量

q： 極版の電荷 (電流の流れ込む側を正として測る)

E_C： コンデンサの両端の電位差
(＝ B の電位 − A の電位)

とすると静電誘導により

$$E_C = -\frac{q}{C} = -\frac{1}{C}\int I\,dt$$

E_C ＝ A の電位 − B の電位

と定めて電圧降下とよぶことがある．このときは

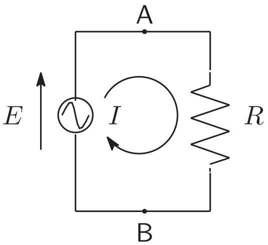
$$E_C = +\frac{1}{C}\int I\,dt$$

.

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用 (再説)

[回路素子の働き 3．抵抗器]



R：抵抗器の電気抵抗

E_R：抵抗器の両端の電位差
(＝ B の電位 − A の電位)

とするとオームの法則により

$$E_R = -RI$$

E_R ＝ A の電位 − B の電位

と定めて電圧降下とよぶことがある．このときは

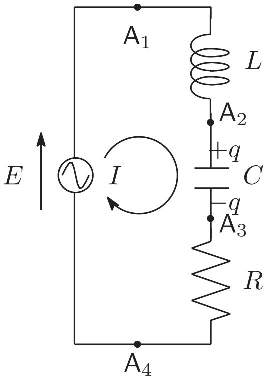
$$E_R = +RI$$

.

2．2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用 (再説)

[LCR 回路の動作]



E = A_1 の電位 − A_4 の電位

E_L = A_2 の電位 − A_1 の電位

E_C = A_3 の電位 − A_2 の電位

E_R = A_4 の電位 − A_3 の電位

だから電位に関するキルヒホッフの法則により

$E_L + E_C + E_R + E = 0$

電圧降下の考え方を使うと

$E_L + E_C + E_R = E$

どちらの場合も

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E \cdots (\star)$$

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用 (再説)

$E = \sin \omega t$

としたときの $(\star)$ の特解を一つ求めよう。

$\sin \omega t = \mathrm{Im} e^{i\omega t}$

だから

$$L\tilde{I}' + R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\,dt = e^{i\omega t} \cdots (\tilde{\star})$$

を解いて $I = \mathrm{Im}\tilde{I}$ とすればよい。

$(\tilde{\star})$ を t で微分して

$$(\tilde{P}) \qquad L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I} = i\omega e^{i\omega t}$$

がえられる.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用 (再説)

$\tilde{I} = \dfrac{1}{Z} e^{i\omega t}$ とおいて解になるように複素定数 Z を求めると, (前回の演習問題でやったように)

$$Z = iL\omega + R + \frac{1}{iC\omega} = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

となるが

$$Z = |Z|e^{i\theta},\quad \text{ただし } |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

だから

$$I = \mathrm{Im}\,\tilde{I} = \mathrm{Im}\,\frac{e^{i\omega t}}{Z} = \mathrm{Im}\,\frac{e^{i\omega t}e^{-i\theta}}{|Z|} = \frac{1}{|Z|}\mathrm{Im}\,e^{i(\omega t - \theta)} = \frac{1}{|Z|}\sin(\omega t - \theta)$$

これが $(\star)$ の解である。

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用 (再説)

$\tilde{I} = \dfrac{e^{i\omega t}}{Z}$ はオームの法則 $I = \dfrac{E}{R}$ に似ている.

異なる点は

その 1. 位相の遅れ $-\theta$ が生じること。

その 2. この「抵抗」にあたる量 Z (これをインピーダンスという) の絶対値

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

は ω によって変わり ω が $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ に一致するときもっとも小さくなること.

2. 2 階線形常微分方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用 (再説)

以上のように Z と ω が分かると I を求めることができる。ここで Z は微分方程式を解かなくとも形式的な計算で求めることができる。

$$\text{コイルのインピーダンス} = iL\omega$$

$$\text{コンデンサのインピーダンス} = \frac{1}{iC\omega}$$

$$\text{抵抗器のインピーダンス} = R$$

としてこれらの総和を回路のインピーダンス Z とすればよいのである。これが交流回路理論で習ったこと。