# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

[本日やること]

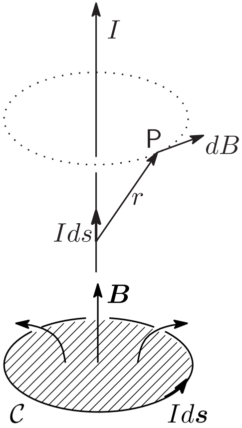
1. 電気回路に交流起電力を加えたとき回路に流れる電流を, 微分方程式を解くことによって求める.

2. その強制振動部分の簡易解法を述べる.

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[回路素子の働き 1. コイル]




電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ の近くの点 P には図のような磁界

$$d\boldsymbol{B} = k\frac{Id\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

ができる．(Biot-Savard の法則) 電流が閉じた曲線 $\mathcal{C}$ 上を流れるときは，これを $\mathcal{C}$ 上線積分して磁界

$$\boldsymbol{B} = \int_{\mathcal{C}} k\frac{Id\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

ができるが，これによる磁力線は図のように $\mathcal{C}$ を境界とする曲面 $S$ を横切ってわき出してくる．これが電磁石の原理である．

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$\boldsymbol{B}$ の $S$ 上面積分

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \qquad (\boldsymbol{n} \text{ は } S \text{ の単位法ベクトル})$$

を磁束という．$\Phi$ は $S$ を変形しても $\mathcal{C}$ が境界である限り不変である．また

$$\Phi = LI \qquad (L \text{ は自己誘導係数})$$

の関係がある．逆に，(近くで磁石を動かしたりすることによって) $\Phi$ が時間的に変化するとき，$C$ には $\Phi$ の変化を打ち消そうとする向きに起電力 $E$ が生じる．つまり

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である．(Lenz の法則) これが発電機の原理である．

この 2 つをあわせると

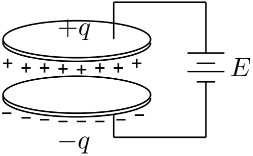
$$E = -L\frac{dI}{dt}$$

がわかる．これを電磁誘導 (自己誘導) 現象という．

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

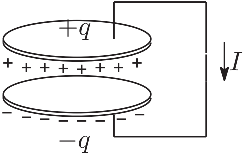
[回路素子の働き 2．コンデンサ]




図のような極板間に電位差 $E$ をかけると極板は帯電する．この時の電荷量 $\pm q$ と $E$ の間には

$$E = \frac{q}{C} \qquad (C \text{ は静電容量})$$

の関係がある．これを静電誘導現象という．



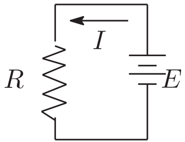

図のように回路を閉じると電流 $I$ が電位の高い方から低い方へ流れる。このとき

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[回路素子の働き 3．抵抗器]




抵抗 $R$ の抵抗器に電位差 $E$ をかけたとき電流 $I$ が流れたとする．電位差を電流の向きと同じ向きを正として測ると

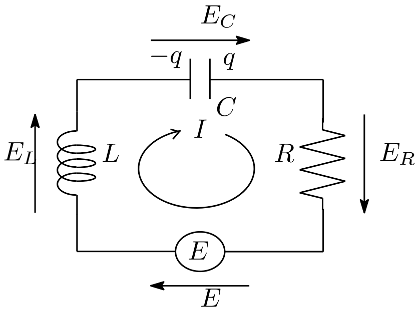
$$E = -IR$$

の関係がある．これがオームの法則である．

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[問題の定式化]




図のような回路に交流起電力 $E = \sin \omega t$ を加えた時，時刻 $t$ における電流 $I(t)$ を計算しよう．ただし

$L$：コイルの自己誘導係数

$C$：コンデンサの静電容量

$R$：電気抵抗

$E_L$：コイルの両端の電位差，

$E_C$：コンデンサの両端の電位差，

$E_R$：抵抗器の両端の電位差，

$q$：コンデンサに蓄えられた電荷の総量とする．

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

$E_L = -LI'$ : (電磁誘導の効果)

$E_C = \dfrac{q}{C}$ : (静電誘導の効果)

$E_R = -IR$ : (オームの法則)

$I = -q'$,

$E_L + E_C + E_R + E = 0$ : (キルヒホッフの法則)

の関係があるから

$$-LI' - RI + \frac{q}{C} = -E = -\sin\omega t$$

となるが, これを更に微分して $I = -q'$ を使うと

$$(P) \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega\cos\omega t$$

がえられる.

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[ $(P)$ の解法] 解を前節の方法で求める.
対応する斉次問題

$$(P_0) \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0$$

の特性方程式は

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0.$$

ここで特性方程式の判別式 $D$ が

$$D = \left(R^2 - \frac{4L}{C}\right) < 0$$

を仮定. (これは解が時間的に振動するための条件である. ) 特性解と基本解系は

$$\lambda = \frac{-R}{2L} \pm \frac{\sqrt{-D}i}{2L}, \quad \left\{ e^{\frac{-R}{2L}t}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2L}t,\ e^{\frac{-R}{2L}t}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2L}t \right\}$$

# 2. 2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$(P)$ の一般解は

$$I(t) = I_0(t) + I_p(t),$$

である．ただし

$$I_0(t) = C_1 e^{\frac{-R}{2L}t} \cos \frac{\sqrt{-D}}{2L} t + C_2 e^{\frac{-R}{2L}t} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2L} t, \quad ((P_0)\text{ の一般解})$$

$I_p(t)$ は $(P)$ の一つの解

である．ここで ここで $R > 0$ を仮定すると

$$|I_0(t)| \leqq (|C_1| + |C_2|) e^{\frac{-R}{2L}t} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

により $I_0(t)$ は時間とともに急速に減衰してしまうので，応用上は $I_p(t)$ のみ調べれば十分な場合が多い．

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

[$I_p(t)$ の解法：未定係数法]　$(P)$ の右辺を複素指数関数に拡張して

$$(\tilde{P}) \qquad L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{1}{C}\tilde{I} = \omega e^{i\omega t}$$

を作ると, Re$\tilde{I}$ は $(P)$ の解となる.

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式： 交流回路への応用

$(\tilde{P})$ の一つの解を未定係数法で作る.

$$\tilde{I} = Ae^{i\omega t}$$

とおき $(\tilde{P})$ に代入すると

$$A\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right)e^{i\omega t} = \omega e^{i\omega t}$$

となるから

$$A = \frac{\omega}{-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}} = \frac{1}{-L\omega + iR + \frac{1}{C\omega}}$$

とすればよいので, $(\tilde{P})$ のひとつの解は

$$\tilde{I} = \frac{1}{-L\omega + iR + \frac{1}{C\omega}}e^{i\omega t} = \frac{1}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}(-ie^{i\omega t})$$

である.

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用

$$Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

とおき $\theta = \mathbf{arg}(Z)$ とおくと

$$\tilde{I} = \frac{1}{|Z|} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} - \theta)}$$

ここで実部をとると

$$I = \mathrm{Re}(\tilde{I}) = \frac{1}{|Z|}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{|Z|}\sin(\omega t - \theta)$$

が $(P)$ の一つの解となる．

# 2．2 階線形常微分方程式

## 定数係数線形 2 階非斉次方程式：交流回路への応用 (訂正)

$E = \sin \omega t$ だからこの等式はオームの法則 $I = E/R$ に似ている．

異なる点は

その 1．位相の遅れ $-\theta$ が生じること。

その 2．この「抵抗」にあたる量

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

の値は $\omega$ によって変わり $\omega$ が $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ に一致するときもっとも小さくなること．