本日やること

1. 2. 2 階線形常微分方程式
   - 2.1 定数係数線形斉次方程式
   - 2.3 定数係数線形 2 階非斉次方程式

2. 2 階線形常微分方程式

復習

復習：定数係数線形 2 階斉次方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b : \text{実数の定数} \tag{2.1}$$

を**定数係数線型 2 階斉次常微分方程式**という.

復習：複素指数関数

複素数 $\lambda = p + iq$ $(p,\ q$ は実数) に対して

$$e^{\lambda} = e^{p}(\cos q + i \sin q)$$

と定めると λ : 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} \tag{$\star$}$$

となる.

2. 2 階線形常微分方程式

復習

(2.1) の解法のアイデア：特性方程式・特性解

$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

だから

$$y = e^{\lambda x}\text{が (2.1) の解} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.2}$$

(2.2) を特性方程式といい、解 λ を特性解という。

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造)

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ．ただし D は特性方程式の判別式．

[1-1] $D > 0$ の場合． 特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$$

[1-2] $D = 0$ の場合． 特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x},\ x\,e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $D < 0$ の場合． 特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 複素解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\} \quad (\text{複素数値解となる})$$

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造　続き)

[2]　$\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とするとき, (2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$

の形をしている．この他に解はない．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

本日の話題：[$D < 0$ の場合の実数値解の求め方]

特性解	: λ_1，λ_2(異なる複素数)
基本解系	: $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \cdots (\star)$
だから一般解は	: $y(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$，　$(k_1, k_2$は任意の複素数$)$

これは複素数値をとる任意の解を表している．複素数値になるのが難点。

実数値をとる解のみを得たければ次のようにすればよい。

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

$D < 0$ の場合の実数値解の求め方

特性解が

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \ (A, B \text{ は実数})$$

であるとき

$$\{e^{Ax} \cos\, Bx,\ e^{Ax} \sin\, Bx\}$$

も基本解系で一般解は

$$y = C_1\, e^{Ax} \cos Bx + C_2\, e^{Ax} \sin Bx$$

C_1, C_2 を実数の任意定数とするとすべての実数値の解、複素数の任意定数とするとすべての複素数値の解を表す。

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[確かめ]：a, b は実数だから特性解は互いに共役な複素数となるので

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \ (A, B \text{ は実数})$$

とおける。

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \cos Bx \ (= y_1(x) \text{ とおく}),$$
$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \sin Bx \ (= y_2(x) \text{ とおく})$$

も (重ね合わせの原理により)2 つとも解になる．また,

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{vmatrix} = B = \frac{\sqrt{-D}}{2} \neq 0$$

だから一次独立.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式

$$y'' + ay' + by = r(x), \quad (r(x) \text{：必ずしも 0 でない既知関数}) \tag{2.12}$$

を**定数係数線型 2 階非斉次常微分方程式**という．

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

定数係数線形 2 階非斉次方程式の一般解

(2.12) の解のひとつを $y_p(x)$ とすると (2.12) の一般解は

$$y = y_p(x) + \text{ (2.1) の一般解}$$

となる．この他に解はない．

$y_p(x)$ を特解という。

[確かめ] $y(x)$：(2.12) の任意の解， $Y(x) = y(x) - y_p(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} &Y''(x) + aY'(x) + bY(x) \\ &\quad = (y''(x) + ay'(x) + by(x)) - (y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)) \\ &\quad = r(x) - r(x) = 0 \end{aligned}$$

より $Y(x)$ は (2.1) の解であるので明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[未定計数法による特解の求め方]

[準備 1]

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_1(x) \text{ の解} \\ y_2(x) \text{ は } y'' + ay' + by = r_2(x) \text{ の解} \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ & \text{は } Y'' + aY' + bY = C_1 r_i(x) + C_2 r_2(x) \text{ の解} \end{aligned}$$

[確かめ]

$$\begin{aligned} &\text{左辺} \\ &= (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + a(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' + b(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) \\ &= C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) \\ &= C_1 r_1 + C_2 r_2 = \text{右辺} \end{aligned}$$

だから.

2．2 階線形常微分方程式
2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 2]　λ：複素数の定数　とする。

$$y'' + ay' + by = ke^{\lambda x} \cdots (\star)$$

の特解として

(i) λ が特性解でないとき　$y_p(x) = A\,e^{\lambda x} \cdots (a)$

(ii) λ が特性解, 特性方程式の判別式 $D \neq 0$ のとき　$y_p(x) = Ax\,e^{\lambda x} \cdots (b)$

が とれる. ただし A は複素数の定数。

[確かめ]　(i) のとき。$(\star)$ に (a) を代入

$$(\star)\text{ の左辺} = (A\,e^{\lambda x})'' + a(A\,e^{\lambda x})' + b(A\,e^{\lambda x})$$
$$= A(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ から明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

(ii) のとき (b) を代入すると

$$
\begin{aligned}
(\star)\text{ の左辺} &= (Ax\,e^{\lambda x})'' + a(Ax\,e^{\lambda x})' + b(Ax\,e^{\lambda x}) \\
&= A\{(2\lambda + a)e^{\lambda x} + (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x}\}
\end{aligned}
$$

かつ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $2\lambda + a = \sqrt{D} \neq 0$ から明らか.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

[準備 3]

$y(x)$, $r(x)$: 複素数値関数, $Y(X) = \mathrm{Re}\, y(x)$, $Z(X) = \mathrm{Im}\, y(x)$ とする.

$$y'' + ay' + by = r(x), \cdots (\star)$$
$$\Rightarrow \quad Y'' + aY' + bY = \mathrm{Re}\, r(x) \quad Z'' + aZ' + bZ = \mathrm{Im}\, r(x)$$

[確かめ] $y = Y + iZ$, $r(x) = \mathrm{Re}\, r(x) + i\mathrm{Im}\, r(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\star) \text{ の左辺} &= (Y + iZ)'' + a(Y + iZ)' + b(Y + iZ) \\ &= (Y'' + aY' + bY) + i\,(Z'' + aZ' + bZ) \\ (\star) \text{ の右辺} &= \mathrm{Re}\, r(x) + i\mathrm{Im}\, r(x)\end{aligned}$$

となるが, 実部虚部同士をそれぞれ比較せよ.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方

k, k_1, k_2, α, β : 実数の定数 とするとき (2.12) の特解 $y_p(x)$ は次のようになるとしてよい.

1. $r(x) = k\,e^{\lambda x}$ の場合, (λ は複素数でもよい)
   1. λ は特性解でないならば $y_p(x) = Ae^{\lambda x}$.
   2. λ は特性解, $D = a^2 - 4b \neq 0$ ならば $y_p(x) = Axe^{\lambda x}$.
2. $r(x) = k \cos \beta x$ または $k \sin \beta x$ の場合,
   1. $\pm i\beta$ は特性解でないならば $y_p(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$.
   2. $\pm i\beta$ は特性解であるならば $y_p(x) = A\,x \cos \beta x + B\,x \sin \beta x$.

2. 2 階線形常微分方程式

2.4 定数係数線形 2 階非斉次方程式

特解の候補の決め方：続き

3. $r(x) = k\, e^{\alpha x} \cos\, \beta x$ または $k\, e^{\alpha x} \sin\, \beta x$ の場合,

   1. $\alpha \pm i\beta$ は特性解でないならば
      $y_p(x) = A\, e^{\alpha x} \cos\, \beta x + B\, e^{\alpha x} \sin\, \beta x.$
   2. $D \neq 0$ かつ $\alpha \pm i\beta$ は特性解であるならば
      $y_p(x) = A\, x e^{\alpha x} \cos\, \beta x + B\, x e^{\alpha x} \sin\, \beta x.$

4. $r(x) = n$ 次多項式の場合,

   1. $a \neq 0,\ b \neq 0$ ならば　$y_p = n$ 次多項式.
   2. $a \neq 0,\ b = 0$ ならば　$y_p = n + 1$ 次多項式.
   3. $a = 0,\ b = 0$ ならば　$y_p = n + 2$ 次多項式.

これらを (2.12) に代入してなりたつように未定係数 $A,\ B, \cdots$ を決めればよい.