

2. 2 階線形常微分方程式

復習

復習：定数係数線形 2 階齊次方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b : \text{実数の定数} \quad (2.1)$$

を定数係数線型 2 階齊次常微分方程式という.

これは完全に解くことができ、解は指数関数と三角関数を用いて表すことができる. 交流回路の計算で重要である. 議論の見通しをよくするために複素指数関数を使う.

2. 2階線形常微分方程式

復習

重ね合わせの原理

C_1, C_2 : 定数とするとき

$y_1(x), y_2(x)$ が (2.1) の解 $\implies C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ も (2.1) の解.

である. これを重ね合わせの原理という。

[確かめ] $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & (C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))'' + a(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x))' \\ & \quad + b(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) \\ & = C_1 (y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)) + C_2 (y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

だから (2.1) をみたら.

2. 2階線形常微分方程式

復習

復習：複素指数関数

複素数 $\lambda = p + iq$ (p, q は実数) に対して

$$e^\lambda = e^p(\cos q + i \sin q)$$

と定めると λ : 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (*)$$

となる.

2. 2階線形常微分方程式

復習

(2.1) の解法のアイデア：特性方程式・特性解

$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}\end{aligned}$$

だから

$$y = e^{\lambda x} \text{ が (2.1) の解} \iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.2)$$

(2.2) を **特性方程式** といい、解 λ を **特性解** という。

2. 2階線形常微分方程式

復習

復習：関数の一次独立性・基本解系

関数の組 $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)\}$ が **1次独立** であるとは

「定数の組 k_1, k_2, \dots, k_m があってすべての x に対して

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_m y_m(x) = 0 \text{ となる}」$$

$$\implies k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$

となることと定める。一次独立でないことを**一次従属**であるという。

(2.1) の解の組で1次独立であるものを**基本解系**という。

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造)

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ. ただし D は特性方程式の判別式.

[1-1] $D > 0$ の場合. 特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

[1-2] $D = 0$ の場合. 特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $D < 0$ の場合. 特性解を λ_1, λ_2 (異なる 2 複素解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 ((2.1) の解の構造 続き)

[2] $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とするとき, (2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

の形をしている. この他に解はない.

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 A. [1] の確かめ]

1. λ が特性解であるとき $y = e^{\lambda x}$ が (2.1) の解となること.
すでに 2 ページ目で述べた.

2. λ が重解であるとき, $y = xe^{\lambda x}$ も (2.1) の解となること.
 $\lambda = -\frac{a}{2}$ となるので, $y = xe^{\lambda x}$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$(xe^{\lambda x})'' + a(xe^{\lambda x})' + b(xe^{\lambda x}) = (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0$$

となるので $y = xe^{\lambda x}$ も解となる. [確かめ終り]

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

初期値問題

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0, & (1) \\ y(0) = A, y'(0) = B & (2) \end{cases} \quad (2.5)$$

を定数係数線型 2 階斉次方程式 (2.1) に対する初期値問題という. (2) を初期条件という. (2 階方程式の場合は初期条件が 2 個必要である.)

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 B.] (2.5) の解はただ一つである. 特に $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ である解は $y(x) \equiv 0$ だけである.

[考え方.] $y_1(x)$, $y_2(x)$ を (2.5) の二つの解とする.

$$\left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right)' = 2(y_1 - y_2)(y_1' - y_2') + 2(y_1' - y_2')(y_1'' - y_2'')$$

$$y_1'' - y_2'' = -a(y_1' - y_2') - b(y_1 - y_2) \text{ だから}$$

$$= 2\{(y_1 - y_2) - a(y_1' - y_2') - b(y_1 - y_2)\}(y_1' - y_2')$$

$$2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 \text{ だから}$$

$$\leq K \left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right) \quad (\text{ただし } K = 2(|a| + |b| + 1))$$

とできる.

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

右辺を移項して両辺に e^{-Kx} をかけると

$$e^{-Kx} \left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right)' - Ke^{-Kx} \left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right) \leq 0$$

積の微分法により

$$\left(e^{-Kx} \left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right) \right)' \leq 0$$

これは $e^{-Kx} \left((y_1 - y_2)^2 + (y_1' - y_2')^2 \right)$ が単調減少であることを意味するから

$$(y_1(x) - y_2(x))^2 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2 \leq e^{Kx} \left((y_1(0) - y_2(0))^2 + (y_1'(0) - y_2'(0))^2 \right)$$

が導かれる。初期条件が一致すれば右辺は 0 となるので $y_1(x) \equiv y_2(x)$ となる。

[考え方終]

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 C.] $y_1(x), y_2(x)$ が (2.1) の解のとき

$$\{y_1(x), y_2(x)\} \text{ が一次従属} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} \right\} \text{ が一次従属}$$

[確かめ] \Rightarrow を示す. 仮定より,

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0, \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

となる定数 k_1, k_2 がある. 微分して

$$k_1 y_1'(x) + k_2 y_2'(x) \equiv 0$$

が分かるから

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これに $x = 0$ を代入すれば結論が得られる.

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

⇐ を示す. 仮定より

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

となる定数 k_1, k_2 がある. ここで

$$Y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

とおくと, これは初期条件 $Y(0) = 0, Y'(0) = 0$ をみたす (2.1) の解となるので補題 B より $Y(x) \equiv 0$. これは $\{y_1(x), y_2(x)\}$ が一次従属であることを意味する. [確かめ終]

これから定理 [1-1] ~ [1-3] の関数の組は一次独立である事が分かる。

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 D.] $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とすると (2.1) の任意の解 $y(x)$ はある定数 k_1, k_2 によって

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

と表される.

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[確かめ] $\left\{ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} \right\}$ は一次独立となるから

$$k_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

となる定数 k_1, k_2 がある. ここで

$$Y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

とおくと, これは初期条件 $Y(0) = y(0), Y'(0) = y'(0)$ をみたす (2.1) の解となるので補題 B より $Y(x) \equiv y(x)$. これは

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

であることを意味する. [確かめ終り]

これで [2] が分かった.

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[$D < 0$ の場合の実数値解の求め方]

特性解 : λ_1, λ_2 (異なる複素数)

基本解系 : $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} \dots (\star)$

だから一般解は : $y(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$, (k_1, k_2 は任意の複素数)

これは複素数値をとる任意の解を表している。複素数値になるのが難点。

実数値をとる解のみを知りたい。

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

だから

$D < 0$ の場合の実数値解の求め方

特性解が

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \quad (A, B \text{ は実数})$$

であるとき

$$\{e^{Ax} \cos Bx, e^{Ax} \sin Bx\}$$

も基本解系で一般解は

$$y = C_1 e^{Ax} \cos Bx + C_2 e^{Ax} \sin Bx$$

C_1, C_2 を実数の任意定数とするとすべての実数値の解、複素数の任意定数とするとすべての複素数値の解を表す。

2. 2階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

a, b は実数だから特性解は互いに共役な複素数となるので

$$\lambda_1 = A + iB, \quad \lambda_2 = A - iB \quad (A, B \text{ は実数})$$

とおける。

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \cos Bx \quad (= y_1(x) \text{ とおく}),$$

$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) = e^{Ax} \sin Bx \quad (= y_2(x) \text{ とおく})$$

も (重ね合わせの原理により)2 つとも解になる。また,

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{vmatrix} = B = \frac{\sqrt{-D}}{2} \neq 0$$

だから一次独立。