2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定数係数線形 2 階斉次方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b\ :\ \text{実数の定数} \tag{2.1}$$

を定数係数線型 2 階斉次常微分方程式という.

これは完全に解くことができて, 解は指数関数と三角関数を用いて表すことができる. 交流回路の計算で重要である。議論の見通しをよくするために複素指数関数を使う.

a, b が定数でない場合, 初等関数の範囲で解が得られないことがある。

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

複素数の定義

$$i^2 = -1$$

となる数 i を考え 虚数単位 という。

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

の形の数を複素数という。

複素数 $z = x + iy$ に対して

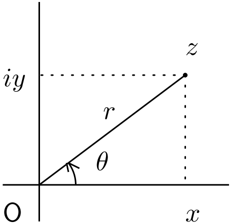
x を複素数 z の実部 (real part) といい，$\mathrm{Re}(z)$ で表す。

y を複素数 z の虚部 (imaginary part) といい，$\mathrm{Im}(z)$ で表す。

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

複素平面と極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して直角座標 (x, y) の点を対応させる。

$r =$ 点 z と原点 O の距離,

$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる。これを複素数 z の**極形式** という

r を**絶対値**といい $|z|$ で表す。 θ を**偏角**といい $\arg z$ で表す

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

回し伸ばしの原理 (その 1)

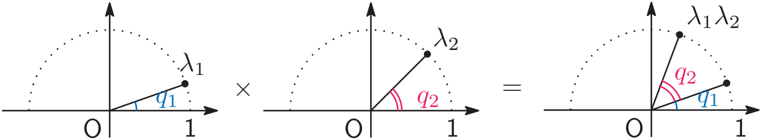
絶対値が 1 である 2 つの複素数

$$\lambda_1 = \cos q_1 + i \sin q_1, \quad \lambda_2 = \cos q_2 + i \sin q_2$$

の積は

$$\lambda_1 \lambda_2 = (\cos q_1 + i \sin q_1)(\cos q_2 + i \sin q_2) = \cos(q_1 + q_2) + i \sin(q_1 + q_2) \quad (\star)$$

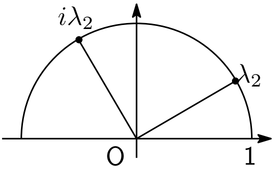
である.



2. 2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

[確かめ]



(Step 1) $\lambda_1 = i$ の場合.

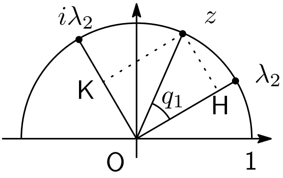
$\lambda_2 = x_2 + iy_2$ とすると

$$\lambda_1\lambda_2 = i(x_2 + iy_2) = -y_2 + ix_2$$

だから $i\lambda_2$ は λ_2 を左周りに角 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの.

2. 2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数



(Step 2) $\lambda_1 = \cos q_1 + i \sin q_1$ の場合.

z：λ_2 を角 q_1 回転したもの.

とし, H, K を O H z K が長方形になるような点とすると

$z =$ H の表す複素数 $+$ K の表す複素数

となるが, $\sin q_1$, $\cos q_1$ の定義より

H の表す複素数は $(\cos q_1)\lambda_2$

K の表す複素数は $(\sin q_1)(i\lambda_2)$

だから

$$z = (\cos q_1)\lambda_2 + (\sin q_1)(i\lambda_2) = (\cos q_1 + i \sin q_1)\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2$$

まとめて

$(\cos q_1 + i \sin q_1)\lambda_2$ は λ_2 を 角 q_1 だけ回転したもの.

これは $(\star)$ と同じことである。

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

回し伸ばしの原理 (その 2)

2 つの複素数

$$\lambda_1 = r_1(\cos q_1 + i \sin q_1), \quad \lambda_2 = r_2(\cos q_2 + i \sin q_2)$$

の積は

$$\lambda_1\lambda_2 = r_1(\cos q_1 + i \sin q_1) r_2(\cos q_2 + i \sin q_2) = r_1 r_2(\cos(q_1+q_2) + i \sin(q_1+q_2)) \tag{$\star\star$}$$

である．いいかえると

$$|\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1|\,|\lambda_2|, \quad \arg(\lambda_1\lambda_2) = \arg(\lambda_1) + \arg(\lambda_2)$$

である。これを回し伸ばしの原理という。

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

複素指数関数の定義

複素数 $\lambda = p + iq$ （p, q は実数）に対して

$$e^{\lambda} = e^{p}(\cos q + i \sin q)$$

と定める．これを**複素指数関数**という。

2．2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

複素指数法則

$$e^{\lambda_1+\lambda_2}=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2},\quad \lambda_1,\lambda_2\text{は複素数}$$

[確かめ]　$\lambda_1=p_1+iq_1,\ \lambda_2=p_2+iq_2$ とすると

$$\text{左辺}=e^{p_1+p_2}(\cos(q_1+q_2)+i\sin(q_1+q_2))$$

だから回し伸ばしの原理により

$$|\,\text{左辺}\,|=e^{p_1+p_2}=e^{p_1}e^{p_2}=\left|e^{\lambda_1}\right|\left|e^{\lambda_2}\right|=\left|e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\right|=|\,\text{右辺}\,|$$

$$\mathrm{arg}(\text{左辺})=q_1+q_2=\mathrm{arg}(e^{\lambda_1})+\mathrm{arg}(e^{\lambda_2})=\mathrm{arg}(e^{\lambda_1}e^{\lambda_2})=\mathrm{arg}(\text{右辺})$$

だから左辺 $=$ 右辺。

2. 2 階線形常微分方程式

復習：複素数・複素指数関数

複素指数関数の微積分

$\lambda = p + iq$: 複素数の定数, x : 実数の変数とするとき,

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x}, \qquad \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\, e^{\lambda x}$$

となる．ただし積分は $\lambda \neq 0$ の場合のみ正しい．また, 左辺の微積分は i を通常の実数定数と同様にあつかって計算する．

[確かめ]

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\left(e^{px}(\cos qx + i \sin qx)\right) = \lambda\, e^{\lambda x}$$

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

重ね合わせの原理

C_1, C_2 : 定数とするとき

$$y_1(x), y_2(x) \text{ が } (2.1) \text{ の解} \Longrightarrow C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \text{ も } (2.1) \text{ の解.}$$

である．これを重ね合わせの原理という。

[確かめ] $C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x))'' + a(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x))' \\
&\qquad\qquad\qquad + b(C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)) \\
&= C_1\,(y_1''(x) + a y_1'(x) + b y_1(x)) + C_2\,(y_2''(x) + a y_2'(x) + b y_2(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから (2.1) をみたす．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[ベクトルの一次独立性]
ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の組 $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ が一次独立 (または線形独立) であるとは，点 O, A, B が一つの直線上にないことである．このことは

$$「定数の組\ k_1, k_2\ があって\ k_1\,\vec{a} + k_2\vec{b} = \vec{0}\ となる」\Longrightarrow k_1 = k_2 = 0$$

というのと同じことである．また，$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\{\vec{a}, \vec{b}\}\ が一次独立\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

である．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

関数の一次独立性・基本解系

関数の組 $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)\}$ が1次独立であるとは

「定数の組 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ があってすべての x に対して

$k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) + \cdots + k_m\, y_m(x) = 0$ となる」

$$\Longrightarrow \ k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

となることと定める．一次独立でないことを一次従属であるという．
(2.1) の解の組で 1 次独立であるものを基本解系という．

[例] 1. $\{1, x, x^2, \cdots, x^m\}$ は一次独立である．

2. $\{e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_m x}\}$, ($a_1, \cdots, a_m$ は全て異なる）は一次独立である．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

特性多項式・特性解

定数係数線型 2 階斉次常微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \ : \ \text{実数の定数} \tag{2.1}$$

に対して

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.2}$$

を (2.1) の特性方程式といい，その解を特性解という．特性方程式の判別式 $a^2 - 4b$ を D で表す．

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理

[1] (2.1) は次のような基本解系を持つ．
[1-1] $D > 0$ の場合．　特性解を $\lambda_1,\ \lambda_2$ (異なる 2 実解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}.$$

[1-2] $D = 0$ の場合．　特性解を λ (重解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda x},\ x\, e^{\lambda x}\}.$$

[1-3] $\boldsymbol{D < 0}$ **の場合．**　特性解を $\lambda_1,\ \lambda_2$ (異なる 2 複素解となる) とするとき

$$\{e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}\}$$

2．2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

定理 (続き)

[2] $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (2.1) の基本解系とするとき, (2.1) の一般解は

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x), \quad (k_1, k_2\text{は任意定数})$$

の形をしている．この他に解はない．

2. 2 階線形常微分方程式

2.1 定数係数線形斉次方程式

[補題 A. [1] の確かめ]

1. λ が特性解であるとき $y = e^{\lambda x}$ が (2.1) の解となること.
$y = e^{\lambda x}$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$(e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + b(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

だから (2.1) が満たされる.
2. λ が重解であるとき, $y = xe^{\lambda x}$ も (2.1) の解となること.
$\lambda = -\dfrac{a}{2}$ となるので, $y = xe^{\lambda x}$ を (2.1) の左辺に代入すると

$$(xe^{\lambda x})'' + a(xe^{\lambda x})' + b(xe^{\lambda x}) = (\lambda^2 + a\lambda + b)xe^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0$$

となるので $y = xe^{\lambda x}$ も解となる. [確かめ終り]