# 1．1 階常微分方程式

## 1.5 変数分離型

非線形の微分方程式は (初等関数の範囲では) 解けないことが多いが, 解ける方程式の型がある。

**変数分離型微分方程式**

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad (f, g \text{ は既知関数．}) \tag{13}$$

の形の微分方程式を変数分離型微分方程式という.
これは, (積分さえ計算できれば) よく知られた関数の範囲で解を得ることができる.

# 1. 1 階常微分方程式

## 1.5 変数分離型

**[解法]** **(Step 1)** $g(y_0) = 0$ を満たす定数 $y_0$ をさがす．もしあれば，定数関数 $y(x) \equiv y_0$ は (13) の解となる．

**(Step 2)** $y(x) = y_0$ とならない解を求める．((13) の解はある $x$ で $y(x) \neq y_0$ ならばすべての $x$ で $y(x) \neq y_0$ であることが分かっている.)

**(Step 2-1)** (13) の両辺を $g(y(x))$ で割る:

$$\frac{1}{g(y(x))}\frac{dy}{dx} = f(x).$$

**(Step 2-2)** 両辺を $\boldsymbol{x}$ で積分する:

$$\int \frac{1}{g(y(x))}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)\,dx + C.$$

**(Step 2-3)** 置換積分法をつかって左辺の積分変数を $x$ から $y$ に変換

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

# 1．1 階常微分方程式

## 1.5 変数分離型

この両辺の積分を計算したものが一般解である.

# 1．1 階常微分方程式

## 1.5 変数分離型

**[例]** $y'(x) = y(x)(2 - y(x)) \ \cdots \ (a)$ の一般解を求めよ．

$(a)$ は (13) で $f(x) = 1$, $g(y) = y(2-y)$ としたものである．まず定数関数 $y = 0$, $y = 2$ は $(a)$ の解である．
次に $y \neq 0, 2$ として両辺を $y(y-2)$ で割ると

$$\frac{1}{y(y-2)} \frac{dy}{dx} = -1.$$

両辺を $x$ で積分すると

$$\text{左辺の積分} = \int \frac{1}{y(y-2)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{1}{y(y-2)}\, dy$$
$$= \int \left( \frac{1}{2(y-2)} - \frac{1}{2y} \right) dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y} \right| + C.$$

# 1．1 階常微分方程式

## 1.5 変数分離型

$$\text{右辺の積分} = \int -1\,dx = -x + C.$$

両辺比較して

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y}\right| = -x + C.$$

これを $y$ について解くと

$$y = \frac{2Ce^{2x}}{Ce^{2x}-1} \quad (C\ \text{は任意定数}).$$

これが一般解である．定数解 $y=0$ は一般解に含まれるが $y=2$ は含まれない．このような解を 特異解という．

# 1．1 階常微分方程式

## 1.6 補足・発展

変数変換によって変数分離型に帰着される微分方程式

**同次型**

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad (f \text{ は既知関数．})$$

[解法]　$u = \dfrac{y}{x}$ により変数を $y$ から $u$ へ変換して $u$ の方程式に直すと，
$y' = (xu)' = u + xu'$ だから

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

のように変数分離型になる．

# 1．1 階常微分方程式

## 1.6 補足・発展

[例]　$y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)} \quad \cdots \ (a)$ の一般解を求める.

$f(u) = -\frac{1}{u}$ だから微分方程式は

$$u' = -\frac{1+u^2}{xu}$$

となり, 解は

$$u = \pm\frac{\sqrt{C-x^2}}{x} \quad \text{したがって} \quad x^2+y^2=C.$$

# 1．1 階常微分方程式

## 1.6 補足・発展

$y'(x) = f(ax + by(x) + c)$ （$f$ は既知関数, $a$, $b$, $c$ は定数．）

**[解法]** $u = ax + by + c$ により変数を $y$ から $u$ へ変換して $u$ の方程式に直すと, 変数分離型になる.

**[例]** $y'(x) = \dfrac{1}{x + y(x)} \cdots (a)$ の一般解を求める.

$u = x + y \ u' = 1 + \dfrac{1}{u}$

$$u - \log u = x + C \quad \text{したがって} \quad y - \log(x + y + 1) = C.$$