1. 1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

定理 1.6. (非斉次線型方程式の解の構造)

1 階線形微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = r(x). \tag{9}$$

の一般解は

$$y(x) = y_p(x) + C\,e^{-F(x)} \tag{$\star$}$$

と表すことができる．ただし $y_p(x)$ は (9) の任意の一つの解, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数, C は任意定数．したがって $C\,e^{-F(x)}$ は斉次方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 \tag{12}$$

の一般解である．$y_0(x)$ を特解ということがある。特解をひとつ見つければすべての解がわかることになる。

1. 1 階常微分方程式
1.4 未定係数法

[確かめ] $y(x)$ を (9) の解とすると, $y_p(x)$ も (9) の解だから

$$y'(x) + f(x)y(x) = r(x),$$
$$y_p'(x) + f(x)y_p(x) = r(x).$$

両辺を引き算して

$$(y(x) - y_p(x))' + f(x)(y(x) - y_p(x)) = 0.$$

これは $y(x) - y_p(x)$ が斉次方程式 (12) の解であることを表している．したがって定理 1.4 により

$$y(x) - y_p(x) = C\,e^{-F(x)}$$

がわかるがこれは $(\star)$ を意味する。

1．1 階常微分方程式
1.4 未定係数法

定数係数 1 階線形微分方程式

$$y'(x) + ay(x) = r(x) \quad (a \text{ は定数}, r(x) \text{ は既知関数}) \tag{7}$$

の右辺 $r(x)$ が特別な関数である場合は, 未定係数法により簡単に特解を求めることができる.

1. 1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

準備

(i) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$

が x の恒等式

$$\iff \quad n = m, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots$$

(ii) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ が x の恒等式

$$\iff \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

(iii) $a \sin kx + b \cos kx = 0$ が x の恒等式 $\iff \quad a = b = 0$

1. 1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

未定係数法 (その 1)

$r(x) = (n$ 次多項式) のとき

$$y_p(x) = \begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots & (a \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots & (a = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおき (9) を満たすように「未定係数」$a_0, a_1, \cdots$ を決めればよい.

1. 1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

[例 1.10]　$y' + 3y = x^2 - 1 \ \cdots \ (a)$ の一般解を求めよ.

$y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ とおいて (a) の y に代入

$$\begin{aligned}(y_p)' + 3y_p &= (2\alpha x + \beta) + 3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= 3\alpha x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + \beta + 3\gamma = x^2 - 1.\end{aligned}$$

したがって　$3\alpha = 1 \quad 2\alpha + 3\beta = 0 \quad \beta + 3\gamma = -1$ でなくてはならない.
これを解いて $\alpha = \dfrac{1}{3}, \beta = -\dfrac{2}{9}, \gamma = -\dfrac{7}{27}$ を得るから
$y_p = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x - \dfrac{7}{27}$.
一方, $y' + 3y = 0 \ \cdots \ (b)$ の一般解は $y = Ce^{-3x}$ だから a の一般解は

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27} + Ce^{-3x}.$$

1．1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

未定係数法 (その 2)

$r(x) = \cos\omega x,\ \sin\omega x$ のとき

$$y_p(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x$$

とおき係数 α, β を決めればよい.

1．1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

[例 1.12]　$y' + 2y = \cos x \ \cdots \ (a)$ の一般解を求めよ．

$y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x$ を (a) の y に代入すると

$$
\begin{aligned}
(y_p)' + 2y_p &= (-\alpha \sin x + \beta \cos x) + 2(\alpha \cos x + \beta \sin x) \\
&= (2\alpha + \beta) \cos x + (2\beta - \alpha) \sin x = \cos x.
\end{aligned}
$$

したがって

$$2\alpha + \beta = 1 \qquad -\alpha + 2\beta = 0$$

でなくてはならない．これを解いて $\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\beta = \dfrac{1}{5}$ を得るから

$$y_p = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

一方, $y' + 2y = 0 \ \cdots \ (b)$ の一般解は $y = Ce^{-2x}$ だから (a) の一般解は

$$y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + Ce^{-2x}.$$

1. 1 階常微分方程式

1.4 未定係数法

未定係数法 (その 3)

$r(x) = ke^{qx} \quad (q \neq -a)$ のとき

$$y_p(x) = \alpha e^{qx}$$

とおき係数 α を決めればよい.

[例 1.13]　$y' - y = 2e^{2x} \quad \cdots \ (a)$ の一般解を求めよ.

$y_p = \alpha e^{2x}$ を (a) の y に代入すると

$$(y_p)' - y_p = (2\alpha - \alpha)e^{2x} = 2e^{2x}.$$

したがって $\alpha = 2$ でなくてはならない.
一方, $y' - y = 0 \quad \cdots \ (b)$ の一般解は $y = Ce^x$ だから (a) の一般解は

$$y = 2e^{2x} + Ce^x.$$