基本事項

1. 指数関数の微積分：

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C,\ (\ a:\text{定数})$$

2. 積分因子の性質： $F'(x) = f(x)$ のとき $F(x) = t$ とおくと合成関数の微分法により

$$(e^{F(x)})' = \frac{d}{dx}e^{F(x)} = \frac{dt}{dx}\,\frac{d}{dt}e^t = \frac{d}{dx}F(x)\,e^t = f(x)e^{F(x)}$$

3. 微分と積分の関係：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \ \Leftrightarrow\ f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

4. 積の微分法：

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

定義

定義

$y(x)$：未知関数，$f(x)$：定数でない既知関数，$r(x)$：既知関数 とする．

$$y'(x) + f(x)y(x) = r(x). \tag{9}$$

を 変数係数 1 階線型常微分方程式 という．$r(x) \equiv 0$ のとき斉次型，$r(x) \neq 0$ のとき非斉次型という． これは 正規型 1 階方程式 において $f(x, y) = -f(x)y + r(x)$ としたものである．

変数係数 1 階線形常微分方程式

一般解

定理 1.4. 斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式の一般解

$f(x)$ を連続関数とする．斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0. \tag{12}$$

の一般解は

$$y(x) = C\, e^{-F(x)} \quad (C : \text{任意定数}) \tag{10}$$

であり他に解はない．ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数.

変数係数 1 階線形常微分方程式

一般解

定理 1.5. 非斉次型変数係数 1 階線型常微分方程式の一般解

$f(x)$, $r(x)$ を連続関数とする．必ずしも斉次型でない (9) の一般解は

$$y(x) = \left(\int r(x)\, e^{F(x)}\, dx + C \right) e^{-F(x)} \quad (C：任意定数) \tag{11}$$

であり他に解はない．ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

ここに現れる $e^{F(x)}$ を (12) の積分因子という．

変数係数 1 階線形常微分方程式

証明

[定理 1.5 の確かめ] (9) の両辺に積分因子 $e^{F(x)}$ をかけると

$$y'(x)e^{F(x)} + f(x)ye^{F(x)} = r(x)e^{F(x)}$$

であるが $\left(e^{F(x)}\right)' = f(x)e^{F(x)}$ と積の微分法により

$$\text{左辺} = y'(x)e^{F(x)} + y\left(e^{F(x)}\right)' = \left(y(x)e^{F(x)}\right)'$$

だから

$$\left(y(x)e^{F(x)}\right)' = r(x)e^{F(x)}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

証明続き

両辺積分して

$$y(x)e^{F(x)} = \int r(x)e^{F(x)}\,dx + C$$

両辺 $e^{F(x)}$ で割って

$$y(x) = \left(\int r(x)e^{F(x)}\,dx + C\right)e^{-F(x)}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式

例題

[例 1.8.] 初期値問題 $\begin{cases} y'(x) + 2\,x\,y(x) = -x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ の解を求めよう.

y の係数は $2x$ であり $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$ (C は積分定数) だから積分因子は e^{x^2} とすればよい. これを両辺にかけると

$$e^{x^2} y'(x) + 2xe^{x^2} y(x) = -xe^{x^2}$$

となる. $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ に注意して積の微分法を使うと

$$\text{左辺} = e^{x^2} y'(x) + \left(e^{x^2}\right)' y(x) = \left(e^{x^2} y(x)\right)'$$

となるから両辺を積分すると

$$e^{x^2} y(x) = \int (-x) e^{x^2}\,dx + C \quad C \text{ は積分定数}$$

変数係数 1 階線形常微分方程式
例題

となる．右辺の積分を $x^2 = t \cdots (\star)$ とおいて置換積分することにより求める。$(\star)$ を微分して $2x = \dfrac{dt}{dx}$, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ をかけて $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$ したがって

$$\int (-x)e^{x^2}\,dx = \int (-e^t)\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad C \text{ は積分定数}$$

となる．さらに両辺を e^{x^2} で割ると

$$y(x) = -\frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \quad C \text{ は任意定数}$$

が得られるが，これが一般解である．
$x = 1$ を代入すると初期条件 $y(1) = 0$ により $C = \dfrac{e}{2}$ がでてくるから，特殊解は

$$y(x) = \frac{e^{1-x^2} - 1}{2}.$$