定数係数 1 階線形常微分方程式

斉次型

定義

$$y'(x) + ay(x) = 0 \quad (\text{a は定数}) \tag{1}$$

を斉次型定数係数 1 階線型常微分方程式という.

正規形 1 階方程式において $f(x, y) = -ay$ としたものである.

定理 1.1.

(1) の一般解は

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{2}$$

であり他に解はない.

定数係数 1 階線形常微分方程式

斉次型

[定理の確かめ]
(2) が解であることは, $(e^{-ax})' = -ae^{-ax}$ であることから明らか.
さらに, (1) の解は (2) しかないことを示す。
(1) は定理 **1.0** の条件を満たすので, 初期条件を決めるごとに解は一つにきまる.
いま $y = Y(x)$ を (1) の解とする．これは初期条件 $y(0) = Y(0)$ を満たす (1) の解である.
一方, (2) で $C = Y(0)$ とした $y = Y(0)e^{-ax}$ も初期条件 $y(0) = Y(0)$ を満たす解であるから, $y = Y(x)$ と $y = Y(0)e^{-ax}$ は一致する．すなわち
$Y(x) = Y(0)e^{-ax}$ である。
以上から (2) の形の解の他には解はない.

定数係数 1 階線形常微分方程式

初期値問題

定理 1.2.

a, x_0, y_0 を定数とするとき, 初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) + ay(x) = 0, & (3) \\ y(x_0) = y_0 & (4) \end{cases}$$

はただ一つの解

$$y(x) = y_0\, e^{-a(x-x_0)} \tag{5}$$

を持つ.

定数係数 1 階線形常微分方程式

初期値問題

[定理の確かめ] (1) の一般解は定理 1.1 より

$y(x) = Ce^{-ax} \cdots$ (2)

これが初期条件 (4) を満たすように C の値を決めればよい．(2) に $x = x_0$ を代入して

$$y(x_0) = Ce^{-ax_0}$$

(4) より

$$y_0 = Ce^{-ax_0}$$

だから

$$C = y_0 e^{ax_0}$$

これを (2) に代入して

$$y = y_0 e^{ax_0} e^{-ax} = y_0 e^{-a(x-x_0)}$$

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

定義

$$y'(x) + ay(x) = r(x) \quad (a \text{ は定数}, r(x) \text{ は既知関数}) \tag{6}$$

を**非斉次型定数係数 1 階線型常微分方程式**という．

正規形 1 階方程式において $f(x, y) = -ay + r(x)$ としたものである．

定理 1.3.

$r(x)$ を連続関数とする．(6) の一般解は

$$y(x) = \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C \right) e^{-ax} \quad (C : \text{任意定数}) \tag{7}$$

であり他に解はない．

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

[定理の確かめ]　(7) の両辺を微分

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right)' e^{-ax} + \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right) (e^{-ax})' \\ &= (r(x)\, e^{ax})\ e^{-ax} + \left(\int r(x)\, e^{ax}\, dx + C\right) (-ae^{-ax}) \\ &= r(x) - a\, y(x) \end{aligned}$$

だから (7) は (6) の解.
(7) の他に解がないことは, (6) が定理 **1.0** の条件を満たすことから導かれる.　□

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

[例 1.4] $y'(x)+2y(x)=2x$ の一般解を求めよう．

準備 1. a が定数 $\Rightarrow$ $(e^{ax})'=ae^{ax}$
準備 2. 積の微分法 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

積分因子 e^{2x} を本質的に用いる． e^{2x} を両辺にかけて

$$e^{2x}y'(x)+2e^{2x}y(x)=2xe^{2x}.$$

積の微分法により 左辺 $=\left(e^{2x}y(x)\right)'$ だから

$$\left(e^{2x}y(x)\right)'=2xe^{2x}.$$

両辺積分して

$$e^{2x}y(x)=\int 2xe^{2x}\,dx+C.$$

定数係数 1 階線形常微分方程式

非斉次型

右辺の積分は部分積分法により

$$\int 2xe^{2x}\,dx = 2x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\,dx + C = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

であるから, 解は

$$y = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.$$