1. 1 階常微分方程式

定義

常微分方程式の定義

x : 独立変数

$y = y(x)$: 未知関数 とその導関数

$y'(x)$, $y''(x)$, . . . : 未知関数の導関数

これらの関係式 $F(x, y, y', y'', \cdots) = 0$ を y に関する常微分方程式という.

以後常微分方程式を単に微分方程式という.

1. 1 階常微分方程式

定義

[常微分方程式の分類と用語]

常微分方程式の階数 : 含まれる導関数の階数の最大値

線形微分方程式 : $y, y', y'' \cdots$ に関して 1 次であるような微分方程式

定数係数線形微分方程式 : 線形微分方程式の内 $y, y', y'' \cdots$ の係数が定数であるようなもの

変数係数線形微分方程式 : 線形微分方程式の内 $y, y', y'' \cdots$ の係数が定数でないようなもの

非線形微分方程式 : y, y', y'' に関して 1 次でないもの

一般に微分方程式の解は無数にあるが, これらを任意の値をとりうる定数 (これを任意定数とよぶ) を用いて一般的に表したものを一般解という.

一般解の任意定数に数値を代入して得られる解を特殊解という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

定義

正規型 1 階微分方程式の定義

x：独立変数　$y = y(x)$：未知関数

$f(x, y)$：x, y の連続関数

のとき

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1}$$

の形の微分方程式を正規型 1 階常微分方程式という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

初期条件・初期値問題

正規型 1 階微分方程式の初期値問題

x_0 を x のある特定の値 とするとき

$$y(x_0)$$

の値を定めるような条件を**初期条件**という.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = a_0 \qquad (a_0\text{は定数}) \end{cases} \tag{2}$$

を微分方程式の**初期値問題**という.

1. 正規型 1 階常微分方程式

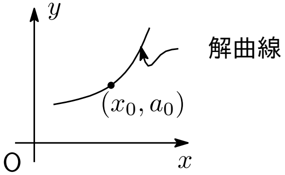
初期値問題の解の存在定理

定理 1.0　正規型 1 階微分方程式の初期値問題の解の存在定理

$f(x, y)$, $f_y(x, y)$ は xy 平面の領域 D で連続であるとし, $(x_0, a_0) \in D$ であるとする. このとき点 (x_0, a_0) の適当な近傍で初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = a_0 \end{cases} \tag{2}$$

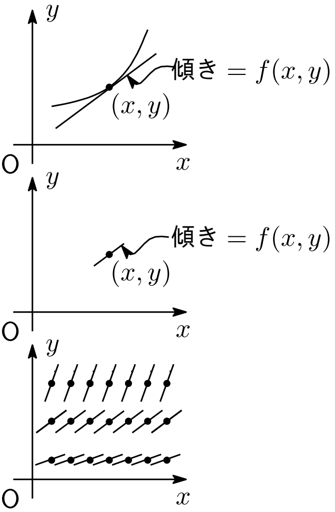
の解がただ一つ存在する.



解のグラフを解曲線という。
定理は点 (x_0, a_0) をとおる解曲線がただひとつあると言うことを主張している。
以下、方向場の考え方を使って説明する。

1. 正規型 1 階常微分方程式

方向場



解曲線の, 点 (x, y) における接線の傾きは $f(x, y)$

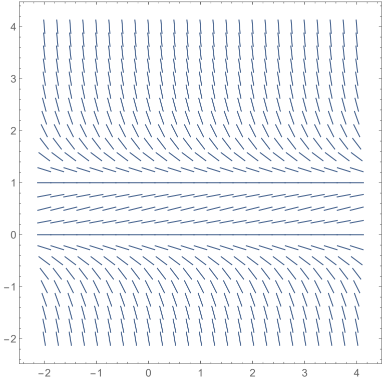
平面の点 (x, y) に傾き $f(x, y)$ の短い線分を書く

このことをすべての点に対して行ったものを方向場という。
解曲線は各点で方向場に接する曲線である。

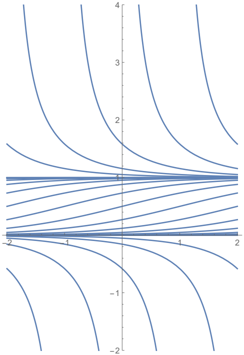
1. 正規型 1 階常微分方程式

例

[例：$y' = y - y^2$ の方向場と解曲線]



$y' = y - y^2$ の方向場



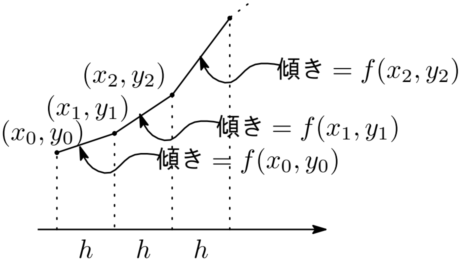
$y' = y - y^2$ の解曲線

1. 正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

[(i) (x_0, a_0) をとおる解曲線が少なくともひとつ存在すること.]

$f(x,y)$ が連続であるという条件は方向場が「連続である」ことを意味するので, 解曲線が存在することを証明することが可能である. 詳細は省略するが, 例えば)



$$x_{i+1} = x_i + h,$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$i = 0, 1, \cdots$$

で決まる Cauchy の折れ線は (1) の近似解であり、$h \to 0$ として極限をとると（部分列が）真の解に収束することが示せる。

1. 正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

[(ii) 一点をとおる解曲線はひとつしかないこと.]
$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ を (2) の 2 つの解とする. $x > x_0$ で考える.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y_1(x) - y_2(x))^2 &= 2(y_1'(x) - y_2'(x))(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= 2(f(x, y_1) - f(x, y_2))(y_1(x) - y_2(x)) \\ &\leqq 2C(y_1(x) - y_2(x))^2\end{aligned}$$

$\leqq$ の確かめ： $y \mapsto f(x, y)$ に平均値の定理を使うと, 適当な数 $y_1 < \xi < y_2$ により

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1(x) - y_2(x))$$

また, $f_y(x, y)$ は連続だから有界であり, ある数 C で $|f_y(x, y)| \leqq C$ となるから

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq C|y_1(x) - y_2(x)|$$

1. 正規型 1 階常微分方程式

定理 0.1 の考え方

両辺に e^{-2Cx} をかけて移項すると

$$e^{-2Cx}\frac{d}{dx}(y_1(x)-y_2(x))^2-2Ce^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2 \leqq 0$$

ところで積の微分法により

$$\text{左辺} = \frac{d}{dx}\left(e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2\right)$$

だから $e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2$ は単調減少であることが分かる．したがって

$$e^{-2Cx}(y_1(x)-y_2(x))^2 \leqq e^{-2Cx_0}(y_1(x_0)-y_2(x_0))^2 = 0$$

つまり

$$x > x_0 \text{ ならば} \quad y_1(x) = y_2(x)$$

だから (2) の解はひとつしかない.