問1.

(*) $2x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$　　非線型! 同次形.

両辺 x^2 で割る.　($x \neq 0$ の範囲で考える)

◎　$2 - \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^2}_{u^2} + 2\underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)}_{u} y' = 0$

(1)　$\frac{y}{x} = u$ とおくと. $y = x\,u(x)$.

両辺 x で微分して

$$y' = x\,u'(x) + u(x)$$

◎に代入して

$$2 - u^2 + 2u(xu' + u) = 0$$

$$2 - u^2 + 2xuu' + 2u^2 = 0$$

$$2 + u^2 + 2xuu' = 0$$

(**)　$u' = \boxed{-\frac{u^2+2}{2xu}}$ ← 非線型. 変数分離型.

$$= -\frac{1}{2x} \times \frac{u^2+2}{u}$$

(2) (**) は変数分離型だから解ける。 (第6回をみよ)

(step1) $-\frac{u^2+2}{u}=0$ となる u はない。

(step2)

$$\frac{u}{u^2+2}\overset{u'}{\frac{du}{dx}} = -\frac{1}{2x}$$

両辺 x で積分

$$\int \frac{u}{u^2+2}\underbrace{\frac{du}{dx}dx}_{=du} = -\int \frac{1}{2x}dx$$

置換積分法より

左辺 $= \int \frac{u}{u^2+2}du$

$u^2+2=v$ とおくと $\frac{dv}{du}=2u$, $du=\frac{dv}{2u}$ だから

$$= \int \frac{\cancel{u}}{v}\frac{dv}{2\cancel{u}} = \frac{1}{2}\log|v| = \frac{1}{2}\log(u^2+2)$$

右辺 $= -\frac{1}{2}\log|x|$

したがって

$$\frac{1}{2}\log(u^2+2) = -\frac{1}{2}\log|x| + \overset{\text{任意定数}}{C}$$

$$\log(u^2+2) = \underbrace{-\log|x|}_{=\log\frac{1}{|x|}} + \underbrace{2C}_{=\log e^{2C}} = \log\left|\frac{e^{2C}}{x}\right|$$

$$u^2+2 = \left|\frac{e^{2C}}{x}\right| = \pm\frac{e^{2C}}{x}$$

(＊＊＊) $$\boxed{x(u^2+2)} = \underbrace{\pm e^{2C}}_{=C'}$$

C' とおく。0でない任意の定数である。

(3) (＊＊＊) に $u=\dfrac{y}{x}$ を代入

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}+2\right)=C$$

$$y^2+2x^2=Cx$$

$$y^2+2\left(x^2-\frac{C}{2}x\right)=0$$

$$y^2+2\left(\left(x-\frac{C}{4}\right)^2-\frac{C^2}{16}\right)=0$$

$$2\left(x-\frac{C}{4}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{8}$$ $\boxed{\text{楕円}}$

$x=-1$ のとき $y=1$ とすると

$$1+2=-C, \quad C=\boxed{-3}$$

変数係数1階線型

問2

(*) $y' + y\tan x = \dfrac{1}{|\cos x|}$ $\left(x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)

1階斉次線型はすべて変数分離型である

(**) $y' + y\tan x = 0$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x = t$ とおいて $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ より $\sin x\,dx = -dt$

$$= \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| = -\log|\cos x|$$

$$e^{\int \tan x\,dx} = e^{-\log|\cos x|} = e^{\log\frac{1}{|\cos x|}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

これが積分因子。これを(**)にかけて

$$\underbrace{\frac{y'}{|\cos x|} + y\tan x\,\frac{1}{|\cos x|}}_{=\left(\frac{y}{|\cos x|}\right)'} = 0$$

$$\left(\frac{1}{|\cos x|}\right)' = -\frac{|\cos x|'}{|\cos x|^2} = -\frac{-\sin x \times (\cos x\text{の符号})}{|\cos x|^2} = \tan x \cdot \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\frac{y}{|\cos x|} = C$$

$$y = C|\cos x| = \boxed{\pm C\cos x}$$

$\pm C$ を C とおけ

$\cos x$ が有位ハンイで符号を変えることはない

(2)

$(*)$の一般解 $y = C\cos x$ → 定数変化法

$y = u(x)\cos x$ が$(*)$の解になるようにできる

$(*)$へ代入

$$(u\cos x)' + u\cos x\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

$$(u\cos x)' = u'\cos x - u\sin x, \quad u\cos x\tan x = u\sin x$$

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$u(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \boxed{\tan x + C}$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$y = (\underbrace{\tan x + C}_{u})\cos x$$

$= \sin x + C\cos x$ これが$(*)$の一般解

$y(0) = 2$ ならば $2 = 0 + C$ $\boxed{C = 2}$

問3.　　2階非線型.

(*)　$y'' - (y')^2 = 1$.

(1)　$z = y'$ とおくと

$$z' - z^2 = 1.$$ 1階非線型.

$$z' = 1 + z^2$$ 変数分離型だからとける.

$$\int \frac{1}{1+z^2} \boxed{\frac{dz}{dx} dx} = \int dx = x.$$

$\boxed{\frac{dz}{dx} dx} = dz$　置換積分法.

$$\boxed{(\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z$$

任意定数

$$\boxed{\tan^{-1} z} = x + C_1$$

(2)

$$y' = z = \boxed{\tan(x + C_1)}$$

$$y = \int \tan(x + C_1)\, dx = -\log|\cos(x + C_1)| + C_2$$

問4 第8回

(*) $2y'' + y' - y = 3e^{-x}$ 非同次　定数係数2階線型

(1)

$(*)'$ $2y'' + y' - y = 0$ 同次

の一般解は

特性方程式：$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$(2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

特性解：$\lambda = \frac{1}{2}, -1$

基本解系：$\{e^{\frac{x}{2}}, e^{-x}\}$

一般解：$y_h = \boxed{c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-x}}$

(2) -1は特性解であるので、(*)の特解y_pとして

$y_p = Axe^{-x}$ ← 未定係数法(第9回)

がとれる。(*)へ代入すると

$$2A\underbrace{(xe^{-x})''}_{=(-2e^{-x}+xe^{-x})} + A\underbrace{(xe^{-x})'}_{=-xe^{-x}+e^{-x}} - Axe^{-x}$$

$$= A\{-3e^{-x}\} = 3e^{-x}$$

$A = -1$ とすればよい。

$y_p = \boxed{-xe^{-x}}$

(3)

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} - x e^{-x}.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 0 = 0 \\ y'(0) = \dfrac{C_1}{2} - C_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\frac{3}{2} C_1 - 1 = 0 \quad C_1 = \frac{2}{3}$

$C_2 = -\frac{2}{3}.$

だから

$$y = \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{3} e^{-x} - x e^{-x}.$$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^{\to \infty}}{e^{x}_{\to \infty}} = 0.$

$x \to \infty$ とすると.

大切

$$e^{\frac{x}{2}} \to \infty \quad e^{-x} \to 0. \quad \boxed{x e^{-x} \longrightarrow 0}$$

$$y \longrightarrow \infty$$

問5, $k>0$

(1) $y'' + k^2 y = 0$ 　2階線型, 第8回.

特性方程式 $\lambda^2 + k^2 = 0$

特性解: $\lambda = \pm ki$

基本解: $\{\cos kx, \sin kx\}$.

一般解: $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$.

基本解を $f_1(x) = \cos kx$, $f_2(x) = \sin kx$ とすると Wronski 行列式は

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos kx, & \sin kx \\ -k\sin kx, & k\cos kx \end{vmatrix}$$

$$= k(\cos^2 kx + \sin^2 kx)$$

$$= k \ /\!/$$

(2) $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(0) = C_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin 0}_{=0} \end{cases}$ なので $C_1 = 0$,

$\left.\begin{array}{l} y(l) = C_2 \sin kl = 0 \\ y \neq 0 \text{ なので } C_2 \neq 0 \text{ なので} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin kl = 0$.

したがって

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots$$