微分方程式(電気) 演習問題 No.9 2021. 11. 30

学生番号	氏名

以下 x を独立変数 y を未知関数とする.

問題 1 $y'' - 4y' + 5y = 0 \cdots (\star)$ を解きたい。

(1) 解が $y = e^{\lambda x}$ の形をしているとして、本当に解になるように λ の値を決めよ。

$y = e^{\lambda x}$ を $(\ast)$ に代入すると

$$(e^{\lambda x})'' - 4(e^{\lambda x})' + 5e^{\lambda x} = 0.$$

$$\underset{\lambda^2 e^{\lambda x}}{\overset{\parallel}{}} \qquad \underset{\lambda e^{\lambda x}}{\overset{\parallel}{}}$$

だから

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 5)e^{\lambda x} = 0.$$

ところで $e^{\lambda x} \neq 0$ だから

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

これを特性方程式という。

この解は

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 5}}{2} = \underline{2 \pm i}$$

(2) $(\star)$ の基本解系で i を含まないものを一つ作れ。

(1) より $(\ast)$ の基本解系として

$$\{e^{(2+i)x}, e^{(2-i)x}\}$$

がとれるが、重ね合わせの原理により

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\{e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}\} = e^{2x}\cos x \\ \frac{1}{2i}\{e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\} = e^{2x}\sin x \end{cases}$$

も解となり、さらに1次独立であることが知られている。だから

$$\underline{\{e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x\}}$$

も(iをふくまない)基本解系。

(3) $(\star)$ の実数値であるすべての解を求めよ。

一般解は、(2)の基本解系を用いて

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x \quad (\ast\ast)$$

$\underline{(C_1, C_2 \text{ は任意の実数の定数})}$

(4) $(\star)$ の初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ。

$(\ast\ast)$ より

$$y' = C_1(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x) + C_2(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x).$$

だから

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \\ y'(0) = 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

初期条件により

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

これをといて

$$C_1 = 1,\ C_2 = -2.$$

以上から、初期条件をみたす解は

$$\underline{y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x)}$$