

## 微分方程式(電気) 演習問題 No.7 解答

問題 1  $\lambda = p + iq$  : 複素数の定数,  $x$  : 実数の変数とすると,

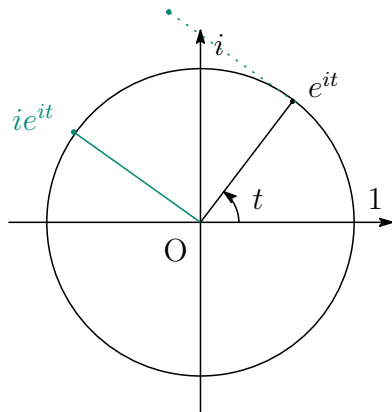
$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x},$$

となることを確かめよ.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left( e^{px} (\cos(qx) + i \sin(qx)) \right)' \\ &= \left( e^{px} \right)' (\cos(qx) + i \sin(qx)) + e^{px} \left( (\cos(qx) + i \sin(qx))' \right) \\ &= p e^{px} (\cos(qx) + i \sin(qx)) + e^{px} (-q \sin(qx) + iq \cos(qx)) \\ &= (p + iq) e^{px} \cos(qx) + (-q + ip) e^{px} \sin(qx) \\ &= (p + iq) e^{px} \cos(qx) + i(p + iq) e^{px} \sin(qx) \\ &= (p + iq) e^{px} (\cos(qx) + i \sin(qx)) = \lambda e^{\lambda x} = \text{右辺} \end{aligned}$$

問題 2 (1)  $e^{it}$  ( $t$  は実数の変数) の軌跡を複素平面上に図示せよ。

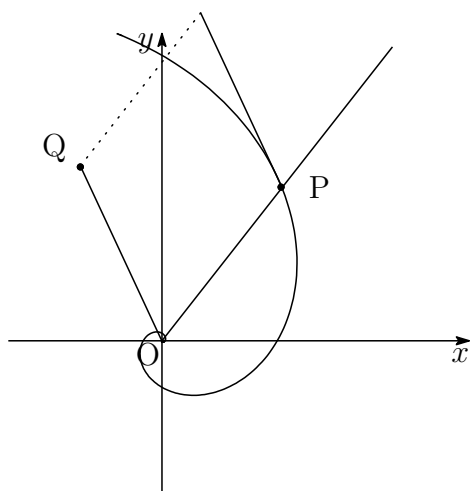
軌跡は原点中心半径 1 の円周である。



(2)  $\frac{d}{dt}e^{it}$  を計算し図中に書き込め。

問題 1 により  $(e^{it})' = ie^{it}$  である。回し伸ばしの原理によりこれは  $e^{it}$  を  $\frac{\pi}{2}$  radian 回転したものである。一方  $t$  を時刻とすると  $e^{it}$  は動点となり  $ie^{it}$  は速度ベクトルとみなせる。だから (平行移動すると) 円周に接している。

- (3) [変更]  $e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$  ( $t$  は実数の変数) の軌跡を複素平面上に図示せよ。



P:  $e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$  を表す点

Q:  $(e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t})' = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$  を表す点  
 とすると OQ は OP を  $\frac{\pi}{3}$  ラジアン回転したものとなる。一方 OQ は ( $t$  を時刻とみたとき) 動点 P の速度ベクトルとなるので軌跡の曲線に接している。つまりこれは OP に対して角  $\frac{\pi}{3}$  ラジアン方向に成長し続けた曲線である。これを対数らせんという。

- (4) [変更]  $\frac{d}{dt}e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$  を計算し図中へ書き込め。

問題 1 より

$$\frac{d}{dt}e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$$

一方  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$  は絶対値 1 偏角  $\frac{\pi}{3}$  であるから回し伸ばしの原理によりこれは  $e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}$  を角  $\frac{\pi}{3}$  だけ回転したものである。

問題 3 (1).  $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$  は一次独立であることを示せ。

$$k_0 \times 1 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n = 0, (x \text{ の恒等式}) \quad \dots (\star)$$

となったとする. このとき  $k_0 = k_1 = \dots = k_n = 0$  であることを示せばよい.  
 $x = 0$  を代入して  $k_0 = 0$ .

( $\star$ ) を微分して

$$k_1 + 2k_2x + \dots + nk_nx^{n-1} = 0, (x \text{ の恒等式})$$

これに  $x = 0$  を代入して  $k_1 = 0$ .

あとはこれを繰り返して  $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$ .

(2).  $\{e^{a_1x}, e^{a_2x}, \dots, e^{a_mx}\}$ , ( $a_1, \dots, a_m$  は全て異なる) は一次独立であることを示せ.

$m = 2$  で示す。

$$k_1 e^{a_1 x} + k_2 e^{a_2 x} = 0, \quad (x \text{ の恒等式}) \cdots (\star 2)$$

となったとする. このとき  $k_1 = k_2 = 0$ であることを示せばよい.

$x = 0$  を代入して  $k_1 + k_2 = 0$ .

( $\star 2$ ) を微分して

$$k_1 a_1 e^{a_1 x} + k_2 a_2 e^{a_2 x} = 0, \quad (x \text{ の恒等式})$$

これに  $x = 0$  を代入して  $k_1 a_1 + k_2 a_2 = 0$ .

併せて

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

ところで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \neq 0$$

だからベクトルの組

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\}$$

は 1 次独立だから  $k_1 = k_2 = 0$ .