演習 No.6. 解答

(1) $y' = y^2$　非斉型ですが 変数分離型であるとける.

(Step 1)　$y^2 = 0$ となるのは $y = 0$ のときで.

$y \equiv 0$ は. (1) の ひとつの解.

(Step 2)　$y \neq 0$ として.

両辺 $\div y^2$.　$\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx} = 1$.

両辺 x で積分　$\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int 1\,dx$.

置換積分.　$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int 1\,dx$.

積分実行：　$-\dfrac{1}{y} = x + C$.

$$y = \frac{-1}{x+C}$$　C: 任意定数.

(2) $y' = \dfrac{1-y^2}{x}$.

(step1) $1-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$ だから

∴ $y=1$, $y=-1$ (定数関数)

は解である。

(step2) $y \neq \pm 1$ である解をさがす。

両辺 $1-y^2$ で割って

$$\frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

両辺 x で積分，

$$\int \frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int \frac{dx}{x}$$

約分

置換積分

$$\parallel$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2}$$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y} \quad \text{だから,}$$

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1-y} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+y} = -\frac{1}{2}\log|1-y| + \frac{1}{2}\log|1+y|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{右辺} = \log|x| + C.$$

右辺 = 左辺 とおいて.

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}} - \log|x| = C.$$

$$\log\left\{\left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}} \Big/ |x|\right\} = C.$$

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}} \Big/ |x| = e^{C}.$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \underbrace{\pm e^{2C}}_{=C'\text{ とおく.}} x^2.$$

$$y = \frac{-1+C'x^2}{1+C'x^2} \qquad C'\text{: 任意定数}$$